



FONDO PIZZOFALCONE



BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio

XV



C

Palchetto

Num.° d'ordine

10022

13-C-1A

NAZIONALE

B. Prov.

I

1333

NAPOLI

VITT. EM. III

BP  
I  
1383





**APPLICATION**  
**DE LA GÉOMÉTRIE**  
**A LA TOPOGRAPHIE.**

VERSAILLES. — IMPRIMERIE DE MONTALANT-ROUGLEUX,  
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE MILITAIRE DE SAINT-CYR.

C07-520

**APPLICATION**  
**DE LA GÉOMÉTRIE**  
**A LA TOPOGRAPHIE,**

CONTENANT

**LE COURS DE TOPOGRAPHIE**

FAIT A L'ÉCOLE MILITAIRE DE SAINT-CYR,

PAR F.-C. DUHOUSSET, EX-INGÉNIEUR GÉOGRAPHE,  
CAPITAINE D'ÉTAT-MAJOR,

Chevalier de la Légion-d'Honneur, ancien Élève de l'École Polytechnique.

OUVRAGE ADOPTÉ PAR LE CONSEIL D'INSTRUCTION DE L'ÉCOLE,  
AVEC L'APPROBATION DU MINISTRE DE LA GUERRE.

---

Seconde Edition.

---

**PARIS,**  
A LA LIBRAIRIE MILITAIRE DE GAULTIER-LAGUIONIE,  
Rue et Passage Dauphine, n.° 36.

1842.



02240

## AVANT-PROPOS.

Cet ouvrage, entrepris pour faciliter la *révision* de mes leçons aux Élèves de l'École spéciale militaire *qui en ont suivi les développements*, contient les principales notions de la Topographie.

Publié d'abord par cahiers et feuilles détachées, il s'est annuellement accru de modifications inspirées par l'étude et l'expérience (1); et, c'est après avoir vu s'épuiser les 2500 exemplaires de cette rédaction provisoire, que je me suis déterminé à en coordonner toutes les parties dans une seconde édition.

Guidé par cette maxime : que, dans les applications, **TOUT CE QUI N'EST PAS UTILE EST NUISIBLE**, j'ai introduit en 1824, dans l'enseignement de la Topographie, une méthode d'approximation aussitôt répandue par mes nombreux auditeurs (2), et à laquelle la construction et l'emploi des instruments doivent d'importantes simplifications.

---

(1) Mémoire sur la Topographie, 1824; Leçons de Topographie, 1825; Applications de la Géométrie à la Topographie, 1832 et 1834.

(2) Plus de 3000 Officiers ont reçu mes leçons, depuis janvier 1823 que je suis attaché à l'École militaire.

En me conformant aux prescriptions les plus essentielles du Dépôt de la Guerre, et sans sortir des connaissances mathématiques exigées des Élèves de l'École militaire, je n'ai rien laissé à démontrer, ni dans la théorie ni dans la pratique, tant pour remplir mes devoirs de Professeur, que pour satisfaire aux diverses questions qui ont provoqué la plupart de mes recherches.

Le Cours de Topographie, devenu une application de la Géométrie, a été divisé en quatre livres.

LE PREMIER LIVRE, sous le titre d'Introduction à l'étude de la Topographie, présente, dans son premier chapitre, le moyen de définir les corps par un plan et des cotés. L'utilité de ce genre de description, depuis long-temps adopté dans les applications de la Géométrie à la Fortification, l'a fait annexer au Cours de Géométrie descriptive de l'École.

J'ai commencé le second chapitre par des considérations, qui, déjà énoncées par quelques auteurs, me paraissent donner la meilleure origine à la Trigonométrie; et, après avoir rappelé les propositions fondamentales de cette partie de la Géométrie, j'en ai déduit les approximations des procédés topographiques et la solution de toutes les questions de la Planimétrie.

LE SECOND LIVRE comprend la description et l'usage des instruments, que l'on aura à choisir suivant l'approximation demandée aux résultats topographiques. J'ai soumis les instruments délicats des grandes opérations géodésiques, à des simplifications de même nature que celles des instruments employés aux détails de la Topographie.

Le premier chapitre de ce livre, accompagnerait avantageusement les notions élémentaires d'Algèbre et de Géométrie.

LE TROISIÈME LIVRE renferme la Topographie régulière, avec des exemples de ses principales opérations.

LE QUATRIÈME LIVRE est destiné aux Levés irréguliers, qui font partie des Reconnaissances.

La TABLE des Matières est assez détaillée pour servir d'exposition à la marche de ce Traité : et, quoique j'y aie désigné, *par des caractères italiques*, les questions en dehors du Cours de l'École Militaire, j'ai encore ajouté à cette Table le programme des leçons orales, ainsi que celui des dessins et des applications sur le terrain, qui, à Saint-Cyr, initient les Élèves à tous les genres de Levés.

Les résultats dus à mes soins, et les travaux topographiques envoyés au Dépôt de la Guerre par un grand nombre d'Officiers sortis de l'École militaire, ont reçu d'assez honorables suffrages pour me faire persévérer dans le mode d'enseignement, que j'ai créé avec la double intention d'utiliser l'instruction mathématique de l'École, et d'habituer les Élèves à l'examen rationnel de procédés pratiques, qu'une routine pénible et défectueuse ne saurait expliquer ni remémorer.

Saint-Cyr, 4<sup>re</sup> Juillet 1842.

DUIHOUSSET.

# FAUTES ESSENTIELLES A CORRIGER.

## Pages

xv de la table, *supprimez* les 31.<sup>e</sup> et 32.<sup>e</sup> lignes.

6, 4.<sup>e</sup> ligne par en bas, *au lieu de* :  $\frac{xQ}{QA}$  . . . . . *lisez* : xq

32, 7.<sup>e</sup> ligne, . . . . . *au lieu de* :  $\left(\frac{1-i}{2}\right)$  . . . . . *lisez* :  $\left(\frac{1-i}{2}\right)^2$

115, 3.<sup>e</sup> ligne, . . . *au lieu de* : le limbe *lisez* : un diamètre du limbe

116, *supprimez* le § 197.

117, *supprimez* la dernière ligne.

118, *Remplacez* les quatre premières lignes par :

mais comme une légère inclinaison

*Id.* 5.<sup>e</sup> ligne, *au lieu de* : on ne se proposait de faire. . . *lisez* : on fera

*Id.* 19.<sup>e</sup> et 20.<sup>e</sup> lignes, *au lieu de* : en établissant. . . . . aussitôt

*lisez* : en essayant

157, *supprimez* les 17.<sup>e</sup> et 18.<sup>e</sup> lignes qui terminent le § 273.

167, 10.<sup>e</sup> ligne, . . . . . *au lieu de* : et d'un tube. . *lisez* : et un tube

*Id.*, 19.<sup>e</sup> ligne, *supprimez* : en fixant

171, 4.<sup>e</sup> ligne par en bas, *au lieu de* :  $\frac{1^d + (g'' - g)}{2}$  . . . *lisez* :  $1^d + \left(\frac{g'' - g}{2}\right)$

171, dernière ligne } . . *au lieu de* :  $\left(\frac{n}{2000^m}\right)$  . . . *lisez* :  $2 \left(\frac{n}{2000^m}\right)$   
172, 1.<sup>re</sup> et 2.<sup>e</sup> lignes }

180, dernière ligne, . . . *au lieu de* :  $n < 150^8$  . . . *lisez* :  $n > 150^8$

191, 22.<sup>e</sup> ligne, . . . . . *au lieu de* :  $2^8(\delta + \Delta)$  . . . *lisez* :  $2^4 - (\delta + \Delta)$

215, 12.<sup>e</sup> ligne, . . . . . *au lieu de* :  $r = 4285^m, 7$  . *lisez* :  $r = 4288^m, 7$

216, 4.<sup>e</sup> ligne par en bas, *au lieu de* : et du pignon. *lisez* : au pignon

252, 20.<sup>e</sup> ligne, dernier mot, *au lieu de* : - ne. . . *lisez* : en -

266, 1.<sup>re</sup> ligne, . . . . . *au lieu de* :  $k - t$  . . . . . *lisez* :  $k - 1$

272, 4.<sup>e</sup> ligne par en bas, *au lieu de* : 18a. . . . . *lisez* : 30a.

*Id.*, . . . *id.*, . . . . . *au lieu de* : 207. . . . . *lisez* : 18a



# TABLE DES MATIÈRES.

NOTA. On a désigné, en caractères *italiques*, les questions non-enseignées à l'Ecole Militaire.

## LIVRE I.<sup>er</sup>: INTRODUCTION A LA TOPOGRAPHIE.

### CHAPITRE I.<sup>er</sup> — GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

Définition mathématique des corps, 1. Nécessité de l'Échelle, 2. Épure, 3.

La même échelle convient aux dimensions d'un corps et à leurs projections, 4. Forme particulière du rapport-échelle, 5, pour faciliter la comparaison d'une dimension graphique à la dimension naturelle correspondante, 6. L'échelle indique le but d'exactitude et l'approximation désirable de toute description graphique, 7. pag. 1, 2

Description régulière et description irrégulière des corps; circonstances nécessitant l'emploi de l'une ou de l'autre description, 8 et 9. pag. 3

Utilité de l'échelle graphique pour comparer immédiatement un côté de l'épure à la dimension naturelle correspondante; choix et avantage d'une échelle graphique générale, 10. pag. 3

Description graphique des corps; Plan et cotes de distances d'un corps, 11. pag. 4

Représentation d'un point, 12; d'une droite quelconque, parallèle ou perpendiculaire au plan de projection, 13. pag. 5

Trouver, sur une droite, la cote d'un point projeté et la projection d'un point coté, 14, 15. Différence des cotes par la table des tangentes, 16 et 309. pag. 5, 6 et 180

Exprimer que deux droites se coupent; trouver le point de rencontre de deux droites qui ont la même projection, 17. pag. 7

Exprimer que deux droites sont parallèles; mener, par un point, une parallèle à une droite donnée, 18. pag. 8

Ligne de plus grande pente d'un plan, 19; d'une surface quelconque, 20. La propriété des lignes de plus grande pente relativement aux sections parallèles, 21, fournit le moyen de tracer les projections de ces lignes, 22. pag. 8, 9

Représentation d'un plan par sa ligne de plus grande pente; cas du plan parallèle ou perpendiculaire au plan de projection, 23, 24. pag. 9

Mener, par un point, un plan parallèle à un plan donné, 25. pag. 10

|                                                                                                                                                                                                                                                                                             |             |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| Trouver, sur un plan, la cote d'un point projeté et la section parallèle dont la cote est donnée, 26.                                                                                                                                                                                       | pag. 10     |
| Construire l'échelle de cotes d'un plan, 27.                                                                                                                                                                                                                                                | pag. 10     |
| Trouver l'intersection de deux plans, 28. La rencontre d'une droite avec un plan, 29.                                                                                                                                                                                                       | pag. 10, 11 |
| Mener, par un point, un plan perpendiculaire à une droite; une droite perpendiculaire à une autre, 30. Tracer une droite perpendiculaire à un plan donné, 31.                                                                                                                               | pag. 11, 12 |
| Représentation d'une ligne courbe, cas où elle est plane, 32.                                                                                                                                                                                                                               | pag. 12     |
| Démontrer, de deux manières, la représentation des surfaces par leurs sections parallèles, 33, 34.                                                                                                                                                                                          | pag. 12, 13 |
| Cotes et sections principales, 35; liaison de l'équidistance à l'échelle, 36.                                                                                                                                                                                                               | pag. 13     |
| Trouver, sur une surface, la cote d'un point projeté, 37; et une section parallèle cotée, 38.                                                                                                                                                                                               | pag. 14     |
| Mener un plan tangent à une surface, par un point pris sur elle, 39.                                                                                                                                                                                                                        | pag. 15     |
| Trouver l'intersection de deux surfaces quelconques, 40.                                                                                                                                                                                                                                    | pag. 15     |
| Trouver l'intersection d'une surface par un plan, rabattre cette intersection et lui mener une tangente, 41.                                                                                                                                                                                | pag. 16     |
| Tracer le profil d'une surface et ses points-limites, 42.                                                                                                                                                                                                                                   | pag. 17     |
| Trouver les points de rencontre d'une droite et d'une surface, 43.                                                                                                                                                                                                                          | pag. 18     |
| Déterminer une surface cylindrique, ou conique, enveloppant une surface donnée, 44.                                                                                                                                                                                                         | pag. 18     |
| Mener, par une droite, un plan tangent à une surface donnée : 1. <sup>o</sup> au moyen des surfaces-enveloppes cylindriques, ou coniques, 45; 2. <sup>o</sup> sans employer de surfaces auxiliaires, 46, 47. Cas de la droite perpendiculaire, 48, ou parallèle, 49, au plan de projection. | pag. 19, 20 |
| Une surface quelconque peut être prise pour repère, dans la définition géométrique des corps, 50.                                                                                                                                                                                           | pag. 21     |

## CHAPITRE II. — TRIGONOMÉTRIE.

|                                                                                                                           |                      |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|
| Les angles, formés dans le même sens, sont les différences des inclinaisons de leurs côtés sur une droite quelconque, 51. | pag. 22              |
| Origine et liaison des indices trigonométriques d'un angle, 52, 53.                                                       | pag. 23, 24          |
| Formules principales de la trigonométrie, 54, et table des indices trigonométriques, 55 et 55 bis note 1. <sup>re</sup> . | pag. 25, 26 et 32 A. |
| Formules pour résoudre les triangles rectilignes, 56.                                                                     | pag. 27              |
| Tracer, d'un mouvement continu et par points, l'arc qui termine un segment capable, 55 ter note 2. <sup>o</sup> .         | pag. 32 A.           |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                         |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|
| Trouver la différence des angles au sommet, de deux triangles situés sur le même plan et ayant une base commune, 57. Formule générale de réduction au centre, 58. Cas où les angles au sommet s'appuient sur le même côté, 59; cas où les triangles sont rectangles et dans des plans différents, 60.                                                        | pag. 28, 29             |
| Formules pour résoudre les angles solides trièdres, 61.                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | pag. 30                 |
| Calcul de la projection d'un angle sur un plan, 62. Valeur de la réduction quand on la sait très petite, 63, appliquée à la réduction à l'horizon, 64.                                                                                                                                                                                                       | pag. 30, 31             |
| Projection d'un angle sur un plan qui en contient un côté, 65.                                                                                                                                                                                                                                                                                               | pag. 32                 |
| Les questions trigonométriques se traitent numériquement et graphiquement, 66.                                                                                                                                                                                                                                                                               | pag. 53                 |
| Ce qu'on entend par rattacher un point à une base et coordonner entre eux les points d'un plan, 67.                                                                                                                                                                                                                                                          | pag. 33                 |
| Trouver, par mesures d'angles, les rapports des distances de plusieurs points, 68. Calculer ou construire ces distances, au moyen de l'une d'elles, 69.                                                                                                                                                                                                      | pag. 33, 34             |
| Coordonner des points entre eux : en les rattachant à plusieurs bases, notamment soumises à un certain choix, 70.                                                                                                                                                                                                                                            | pag. 35                 |
| Rattacher, par mesures d'angles, un point accessible à deux repères dont l'un soit accessible, 71.                                                                                                                                                                                                                                                           | pag. 36                 |
| Remarque faisant déterminer, par la mesure d'un seul angle, une station sur un alignement connu, 72.                                                                                                                                                                                                                                                         | pag. 36                 |
| La liaison d'un point accessible à deux repères inaccessibles comprend la détermination d'une distance accessible au moyen d'une distance inaccessible, 73.                                                                                                                                                                                                  | pag. 36                 |
| Quand l'alignement des points donnés sera accessible : il suffira de trois angles pour résoudre cette question, 74.                                                                                                                                                                                                                                          | pag. 37                 |
| Remarque conduisant à la détermination immédiate d'une station, au moyen d'une base inaccessible dont on connaît l'inclinaison sur un alignement passant par cette station, 75.                                                                                                                                                                              | pag. 37                 |
| Cas où la mesure d'un seul angle suffit à ce problème, 76.                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | pag. 37                 |
| On peut, aussi, rattacher immédiatement une station à deux points inaccessibles, lorsque la base auxiliaire s'appuie sur un autre point lié à ces derniers; ce qui revient à déterminer un lien de station à l'aide de trois repères, 77 et 77 bis, note 3. <sup>e</sup> . Cas particulier où le problème exige une seconde station, 78 note 4. <sup>e</sup> | pag. 38, 39, 32a et 32c |
| Rattacher des points à une base, connue par un point extérieur à une direction, 80.                                                                                                                                                                                                                                                                          | pag. 40                 |
| S'assurer qu'un même point inaccessible a été observé de trois stations, 81.                                                                                                                                                                                                                                                                                 | pag. 41                 |
| Forme la plus convenable à donner aux triangles qui rattachent les bases                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                         |

|                                                                                   |             |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| auxiliaires, 82. Limite de grandeur de ces triangles, 83.                         | pag. 42, 43 |
| L'intersection rectangulaire détermine le mieux un point par deux directions, 84. | pag. 43     |
| Calcul des coordonnées de points trigonométriquement liés, 85.                    | pag. 44     |

## LIVRE II. : DESCRIPTION ET USAGE DES INSTRUMENTS EMPLOYÉS EN TOPOGRAPHIE.

### CHAPITRE I.<sup>er</sup> — INSTRUMENTS UTILES AUX OPÉRATIONS GRAPHIQUES.

|                                                                                                                                                                                                    |                 |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|
| Vérification de la règle, 86. Tracer des parallèles, et trouver la limite de parallélisme graphique des droites convergentes, 87.                                                                  | pag. 46         |
| Vérification de l'équerre, 88.                                                                                                                                                                     | pag. 47         |
| Le petit et le grand compas, 89. Règlement du compas à verge-graduée, 90, 91.                                                                                                                      | pag. 47, 48     |
| Description du rapporteur circulaire, pour lire et tracer les angles sur le papier, 92.                                                                                                            | pag. 49         |
| Usage du rapporteur, dont la numération est dans le même sens que les inclinaisons, 93.                                                                                                            | pag. 49         |
| Usage du rapporteur, dont la numération est inverse au sens des inclinaisons, 94. Préférence donnée au rapporteur numéroté en sens inverse des inclinaisons; rapporteur en corne, 95.              | pag. 50         |
| Méthode bien simple d'employer le rapporteur à numération inverse, pour lire un angle marqué, 96, et pour tracer, par un point donné, une droite inclinée sur une autre d'une quantité voulue, 97. | pag. 50, 51     |
| Erreur de marge du rapporteur, moyen d'en détruire l'effet, 98.                                                                                                                                    | pag. 51         |
| Dessiner, avec le rapporteur, l'arc qui termine le segment capable d'un angle, donné numériquement, 99, ou graphiquement, 100.                                                                     | pag. 51, 52     |
| Construction de l'échelle de dixmes, 101, 102, appliquée aux exemples $\frac{1}{150}$ , 103, $\frac{1}{10000}$ , 104.                                                                              | pag. 52 à 57    |
| Construction de l'échelle à numération quelconque, appliquée à l'exemple $\frac{1}{100}$ , 105.                                                                                                    | pag. 57         |
| Définition du vernier. <i>Théorie générale du vernier additif ou soustractif</i> , 106. <i>Simplification du vernier</i> , 107.                                                                    | pag. 58, 59, 60 |
| Théorie du vernier simple, 108. Son usage, 109. Incertitude de lecture due au vernier, 110.                                                                                                        | pag. 61, 62     |
| Applications de l'usage du vernier, 111, 112.                                                                                                                                                      | pag. 63         |
| Transformation des épures, d'une échelle à une autre, 113.                                                                                                                                         | pag. 64         |

|                                                                                                                   |                 |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|
| <i>Angle de transformation, 114, et compas de proportion, 115.</i>                                                | pag. 65, 66     |
| <i>Principes de construction du pantographe, 116...119.</i>                                                       | pag. 66, 67, 68 |
| <i>Description du pantographe du 1.<sup>er</sup> genre, 120. Su préparation, 121, et sa mise en station, 122.</i> | pag. 68, 69, 70 |
| <i>Numéros propres à régler un pantographe du 1.<sup>er</sup> genre, dans un rapport donné, 123, 124, 125.</i>    | pag. 70, 71     |
| <i>Pantographe du 2.<sup>e</sup> genre, 126. Règlement et numération de cet instrument, 127.</i>                  | pag. 72         |
| <i>Le pantographe du 2.<sup>e</sup> genre, ou micrographe, n'est employé qu'à la réduction des dessins, 128.</i>  | pag. 73         |
| <i>Manière d'équiper un pantographe, 129.</i>                                                                     | pag. 74         |
| <i>Le pantographe employé à graver les dessins en même temps qu'on les transforme, 130.</i>                       | pag. 74         |

## CHAPITRE II. — INSTRUMENTS ET MOYENS PROPRES A OBTENIR LES DISTANCES.

|                                                                                                                                                                                                                       |             |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| <i>Règles, 131, et chaîne, 132, employées à mesurer les distances. Le cordeau, 133, le pas de l'homme et celui du cheval, 134, suffisent quelquefois à ces mesures.</i>                                               | pag. 75, 76 |
| <i>Régler numériquement, 135, et graphiquement, 136, chacune des portées employées à la mesure des distances.</i>                                                                                                     | pag. 76, 77 |
| <i>Placer un ou deux observateurs sur l'alignement de deux points désignés, 137, 138.</i>                                                                                                                             | pag. 77, 78 |
| <i>Conclusion relative à la disposition de deux axes visuels dans un tuyau, ou dans une lunette, 139. La stadia accessible ou inaccessible, 140.</i>                                                                  | pag. 79     |
| <i>Règlement de la stadia accessible employée à l'évaluation numérique des distances, 141...144.</i>                                                                                                                  | pag. 80, 81 |
| <i>Régler la stadia accessible sur une distance graphique, 145.</i>                                                                                                                                                   | pag. 82     |
| <i>Règlement de la stadia inaccessible à repère constant, 146, 147, et usage de cet instrument pour estimer deux distances inaccessibles sur un même alignement, au moyen de la différence de ces distances, 148.</i> | pag. 83, 84 |
| <i>Règlement de la stadia inaccessible à repère variable, 149.</i>                                                                                                                                                    | pag. 85     |
| <i>Évaluation des distances au moyen du temps mis à les parcourir, et utilité de l'échelle de temps, 150.</i>                                                                                                         | pag. 86     |
| <i>Évaluation des grandes distances au moyen des longueurs itinéraires, 151.</i>                                                                                                                                      | pag. 86     |
| <i>On peut employer le son pour évaluer de grandes distances, 152. Limite inférieure de ces distances, 153.</i>                                                                                                       | pag. 87     |
| <i>Expériences qui ont servi à déterminer la vitesse du son et l'action du vent sur</i>                                                                                                                               |             |

|                                                                                                                                                  |                |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| <i>cette vitesse. Moyen de rendre l'évaluation des distances indépendante de l'influence du vent, 154.</i>                                       | pag. 88        |
| Corrections pour réduire à l'horizon les distances mesurées sur un terrain accidenté; limite, tables et exemple de ces corrections, 155 et 308.  | pag. 89 et 179 |
| Corrections pour réduire à l'horizon les distances estimées avec la stadia accessible; limite, tables et exemple de ces corrections, 156 et 309. | pag. 91 et 179 |
| Importance des corrections précédentes, 157.                                                                                                     | pag. 92        |

### CHAPITRE III. — INSTRUMENTS ANGULAIRES, OU GONIOMÈTRES.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |               |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|
| Définition de l'alidade, son axe visuel, sa ligne de foi; alidade plongeante, 158.                                                                                                                                                                                                                 | pag. 93       |
| Position de l'axe visuel relativement à la base d'une alidade, 159.                                                                                                                                                                                                                                | pag. 94       |
| Moyen de rendre l'axe visuel de l'alidade parallèle au plan de sa base. Tuyau visuel d'épreuve, 160.                                                                                                                                                                                               | pag. 94       |
| Moyen de rendre plane la surface décrite par l'axe visuel plongeant, 161, et de disposer ce plan perpendiculairement à la base de l'alidade, 162.                                                                                                                                                  | pag. 95, 96   |
| La recherche de l'erreur occasionnée par une alidade plongeante, dont l'axe visuel n'est pas perpendiculaire à la charnière du tuyau, montre qu'on peut, en géodésie, se dispenser de régler cet axe visuel, et qu'il n'y a pas d'inconvénient à en fixer l'objectif et l'oculaire, 163, 164, 165. | pag. 96 à 100 |
| La recherche de l'erreur occasionnée par une alidade plongeante, dont le tuyau visuel a sa charnière non parallèle à la base, montre la nécessité de rectifier la position de cette charnière quand les plongées visuelles sont différentes, 166, 167.                                             | pag. 100, 101 |
| Définition et composition générale des goniomètres, 168. Ils sont à limbe fixe ou à limbe mobile, 169. Index d'un goniomètre, 170.                                                                                                                                                                 | pag. 102, 103 |
| Station d'un goniomètre, au moyen de sa mise en place et de sa déclinaison, 171. Coup d'alidade; observation d'un angle, incertitude de lecture de cette observation, 172.                                                                                                                         | pag. 103      |
| Sens des coups d'alidade et des angles, par rapport à la numération d'un goniomètre à limbe fixe, 173, ou à limbe mobile, 174.                                                                                                                                                                     | pag. 103, 104 |
| Recherche de l'erreur d'excentricité de l'axe visuel d'un goniomètre; circonstance où elle peut être négligée, 175.                                                                                                                                                                                | pag. 104      |
| Corriger un coup d'alidade, de l'excentricité que peut avoir l'index du goniomètre. Utilité d'un second index lié au premier, 176.                                                                                                                                                                 | pag. 105      |
| Reconnaître si un goniomètre est bien centré, 177. Observer un angle avec un goniomètre décentré, 178.                                                                                                                                                                                             | pag. 106      |

Second tuyau visuel utile pour assurer la déclinaison d'un goniomètre, et qui permet de rendre, à volonté, son limbe fixe ou mobile, en conservant le même index; on préfère, néanmoins, l'emploi du limbe fixe, 179.

pag. 106

Déterminer la graduation du coup d'alidade suivant l'axe visuel-déclinateur d'un goniomètre, pour que la déclinaison puisse avoir lieu sur l'un des côtés de l'angle à observer, 180, 181.

pag. 107

La graduation du coup d'alidade, propre à l'axe visuel-déclinateur d'un goniomètre, résulte de la double-observation d'un angle en déclinant successivement sur ses deux côtés, 182; ou qui revient à observer cet angle avec le goniomètre dont le limbe est rendu successivement fixe et mobile, pour en conclure aussi la double-mesure dudit angle, 183.

pag. 108

Imposer une graduation voulue, et particulièrement la graduation zéro, au coup d'alidade propre à l'axe visuel-déclinateur d'un goniomètre.

Limite où cette disposition est regardée comme invariable, 184.

pag. 109

Jalonner un angle donné, avec un goniomètre à limbe fixe ou à limbe mobile, 185.

pag. 109

Description du cercle astronomique, 186. Sa mise en place, 187.

pag. 111, 112

Le graphomètre, improprement nommé et d'un emploi peu recommandé, 188.

pag. 113

Définition générale de la planchette, 189.

pag. 113

Goniomètres à alidade plongeante; précautions qui rendent difficile l'emploi du téodolite, 190.

pag. 113

L'aiguille aimantée servant de repère spontané aux goniomètres, et remplaçant, ainsi, leur tuyau visuel-déclinateur, 191.

pag. 113

Le déclinatoire; manière de le fixer à la plaque d'un goniomètre, 192; limite de la déclinaison due à l'aiguille aimantée, 193.

pag. 114

Description de la boussole, à limbe fixe ou mobile; excentricité utile de son tuyau visuel, 194, 195. Boussole à la main, 196.

pag. 115, 116

Établir successivement les rayons d'un déclinatoire en coïncidence avec son aiguille, rendre horizontale pour plus d'avantage, 197.

pag. 116

Déclinatoire et boussole nautiques, à limbe nécessairement suspendu, 198.

pag. 116

Décliner une boussole par rapport à un coup d'alidade désigné; et, particulièrement, sur la méridienne magnétique, 199.

pag. 117

Détails sur la manœuvre de la boussole topographique, 200, 201.

pag. 117, 118

Le graphomètre, devenu boussole, à limbe fixe ou mobile, 202.

pag. 118

Principe de construction des goniomètres à réflexion, 203.

pag. 119

Description du goniomètre à simple-réflexion, 204, 205. Il peut être à limbe fixe ou mobile, 206.

pag. 119, 120

|                                                                                                                                                                                                                                             |               |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|
| Déclinaison, coup d'alidade. et observation des angles avec le goniomètre à simple-réflexion, 207. Sens des coups d'alidade, relativement à l'alignement de déclinaison et à la numération du goniomètre à limbe fixe ou mobile, 208.       | pag. 120, 121 |
| La détermination du coup d'alidade-miroir, imaginé sur le tuyau visuel, abrège l'observation d'un angle, 209. Régler le tuyau visuel à une graduation désignée, et particulièrement à zéro, 210.                                            | pag. 121      |
| Manœuvre la plus commode du goniomètre ainsi préparé, 211.                                                                                                                                                                                  | pag. 122      |
| Transformation utile du goniomètre à simple-réflexion en goniomètre à double-réflexion, 212; lequel peut, aussi, avoir son limbe fixe ou mobile et présenter un sens de numération désigné, par la manière facultative de le soutenir, 213. | pag. 123      |
| Le coup d'alidade, selon le tuyau visuel d'un goniomètre à double-réflexion, n'est invariable que dans certaines limites, 214; ce qui modifie la manœuvre de cet instrument, 215, 216.                                                      | pag. 124, 125 |
| L'incertitude de pointé, inhérente aux instruments à réflexion, 217, dispense de vérifier la plupart des pièces qui composent ces instruments, 218.                                                                                         | pag. 125, 126 |
| Le limbe d'un goniomètre à réflexion destiné aux observations simples ne comprend qu'une demi-circonférence; il se réduit encore au sixième et même au huitième de la circonférence, dans le sextant et l'octant, 219.                      | pag. 126      |
| Le rapporteur angulaire considéré comme goniomètre graphique à limbe mobile, son alidade. Relever un coup d'alidade tracé; tracer, par un point donné, un coup d'alidade désigné, 220.                                                      | pag. 127      |
| Imposer une graduation à un coup d'alidade tracé: soit en déterminant la ligne de déclinaison du rapporteur, soit en modifiant la numération de ce dernier, 221.                                                                            | pag. 127      |
| Tracer le tour-d'horizon qui a été observé avec un goniomètre à limbe fixe ou mobile, 222; et appuyer immédiatement ce tour-d'horizon sur une direction donnée, 223.                                                                        | pag. 128      |
| La déclinaison du rapporteur est la même pour coordonner tous les coups d'alidade observés, à différentes stations, avec la boussole libre, 224.                                                                                            | pag. 129      |
| Limbe et déclinaison complémentaires du rapporteur, 225.                                                                                                                                                                                    | pag. 129      |
| Description de la planchette la plus simple, 226. Approximation de sa mise en place, 227.                                                                                                                                                   | pag. 130      |
| Observer un tour-d'horizon avec la planchette, 228, et appuyer immédiatement ce tour-d'horizon sur une direction donnée, 229.                                                                                                               | pag. 131      |
| Usage de la planchette pour tracer des parallèles à une ligne donnée, 230; la limite particulière du parallélisme, dans les opérations topographiques, permet quelquefois d'éviter un obstacle visuel, 231.                                 | pag. 131, 132 |



Transporter un angle d'une partie de la tablette à une autre, 232; diviser un angle en deux parties égales, 233, et tracer des perpendiculaires à une direction donnée, 234. pag. 132, 133

Décrire un arc capable de l'angle, dont la tablette occupe le sommet, 235. pag. 133

La déclinaison de la planchette, par l'aiguille aimantée, transforme ce goniomètre en boussole graphique à limbe fixe; règlement du déclinatoire par rapport à un coup d'alidade tracé, 236. pag. 134

Planchette et boussole graphique, improvisées pour les observations précipitées, 237. pag. 134

Définition de l'angle d'arpenteur; moyen de le repérer sur le terrain et sur le papier, 238. pag. 134

L'équerre visuelle ou d'arpenteur; sa vérification, 239. pag. 135

Moyens d'atténuer l'erreur de division et de lecture d'un limbe, dans la mesure des angles, 240, 241. pag. 136, 137

Un goniomètre répétiteur fait diminuer, à volonté, l'erreur d'observation des angles, 242. pag. 138

*Application ou cercle astronomique* : 1.<sup>o</sup> En s'appuyant sur une direction auxiliaire, 243, ce qui est nécessaire quand les côtés de l'angle à mesurer sont assez petits pour avoir égard à l'excentricité de la lunette inférieure, 248; 2.<sup>o</sup> en déclinant sur le premier côté de l'angle, 244; 3.<sup>o</sup> par le moins de mouvements possible, 245, ce qui revient à employer le cercle répétiteur avec son limbe alternativement fixe et mobile, 246. pag. 138, 139, 140

Prompte-manœuvre du cercle répétiteur, 247. pag. 141

Il est inutile de donner la faculté de répéter les angles : à la boussole, à la planchette et au rapporteur circulaire, 249. pag. 142

Moyen de rendre répétiteur le goniomètre à simple-réflexion; sa manœuvre appuyée sur une direction auxiliaire, 250. Prompte-manœuvre de cet instrument : en déclinant successivement sur les deux côtés de l'angle, 251; laquelle manœuvre consiste à rendre le limbe alternativement fixe et mobile, 252. pag. 143, 144, 145

Manœuvre du goniomètre répétiteur à simple-réflexion : en déclinant toujours sur le même côté de l'angle, 253. pag. 146

Goniomètre répétiteur à double-réflexion, sa manœuvre primitive, 254. La manœuvre la plus prompte de cet instrument consiste à en rendre le limbe alternativement fixe et mobile, 255. pag. 147, 148

Manœuvre du cercle répétiteur à double-réflexion : par sa déclinaison sur un seul côté de l'angle, 256. pag. 149

La multiple-mesure des angles avec les instruments à réflexion, en corrigeant surtout les erreurs du pointé, augmente l'importance de ces goniomètres dans les observations nautiques, 257. pag. 149

CHAPITRE IV. — INSTRUMENTS DESTINÉS AU NIVELLEMENT.

|                                                                                                                                                                                                                                             |               |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|
| Disposition verticale du limbe d'un goniomètre, 258; les principes qui fournissent un horizon spontané, 259, servent à construire les niveaux et les déclinoires verticaux, 260.                                                            | pag. 150, 151 |
| Le niveau-d'eau, 261, et le déclinoire-siphon, 262; limite d'usage de ces instruments, 263.                                                                                                                                                 | pag. 151      |
| Le niveau et le déclinoire-à-perpendiculaire: précision et sensibilité de ce niveau, vulgairement appelé niveau de maçon, 264. Limite de son emploi, 265.                                                                                   | pag. 152      |
| Le niveau et le déclinoire-à-bulle d'air, considérés comme perfectionnement des niveau et déclinoire-à-perpendiculaire: limite d'usage, sensibilité et précision de ces instruments, 266, 267, 268. <i>Calcul de leurs apothèmes</i> , 269. | pag. 153, 154 |
| Expérience qui règle chacun des trois niveaux: relativement à sa base, 270, ou suivant un repère donné, 271.                                                                                                                                | pag. 155, 156 |
| Usage du niveau pour déterminer la trace horizontale d'un plan et pour dresser horizontalement ledit plan, 272.                                                                                                                             | pag. 157      |
| L'aiguille aimantée devenue niveau, suivant sa direction déclinoire, 273.                                                                                                                                                                   | pag. 157      |
| Le niveau visuel, 274; son réglemeut pour de petites distances, 275.                                                                                                                                                                        | pag. 157, 158 |
| Niveau visuel spontané, ses limites et sa mise en station, 276.                                                                                                                                                                             | pag. 158      |
| <i>Conditions imposées au niveau-d'eau visuel, pour que la ligne d'observation décrive un plan autour du centre de station. Conclusion relative au niveau-siphon à bras égaux</i> , 277.                                                    | pag. 159      |
| Description de la mire, usage et perfectionnement de cet instrument, 278, 279.                                                                                                                                                              | pag. 160, 161 |
| Les goniomètres rendus éclimètres, à limbe fixe ou mobile; l'éclimètre-à-siphon n'est pas employé, 280.                                                                                                                                     | pag. 162      |
| Le choix du zénith, pour origine des inclinaisons à la verticale, prescrit une position particulière au limbe de l'éclimètre, 281.                                                                                                          | pag. 162      |
| Station de l'éclimètre, 282. <i>Corrections dues aux excentricités de l'axe visuel et de l'index. Vérification directe de l'axe visuel de l'éclimètre</i> , 283.                                                                            | pag. 162      |
| Trouver la graduation du coup d'alidade, suivant le rayon visuel zénithal ou horizontal; régler l'éclimètre à zéro, 284.                                                                                                                    | pag. 163      |
| Déterminer l'angle zénithal régulateur: 1. <sup>o</sup> au moyen des distances verticale et horizontale de deux points, 285; 2. <sup>o</sup> par la double-mesure de cet angle, 286.                                                        | pag. 164      |

|                                                                                                                                                                      |                    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|
| Régler le déclinaire vertical, pour les observations peu étendues, 287.                                                                                              | pag. 165           |
| <i>La recherche de l'erreur produite sur les inclinaisons zénithales, par la non-verticalité du plan d'observation, montre son peu d'influence en géodésie, 288.</i> | pag. 165           |
| Mesure des inclinaisons zénithales, en s'appuyant sur un horizon artificiel, 289.                                                                                    | pag. 165           |
| Déterminer la courbure longitudinale du tube-à-bulle d'air de l'éclimètre, 290.                                                                                      | pag. 166           |
| Le cercle astronomique devenu éclimètre-à-bulle d'air; règlement du niveau qui calc l'essieu du limbe, 291.                                                          | pag. 167           |
| Mise en place de l'éclimètre astronomique. Disposition verticale de sa colonne, 292, pour faciliter le règlement du niveau-essieu, 293.                              | pag. 167, 168      |
| Description de l'éclimètre topographique-à-bulle d'air, 294.                                                                                                         | pag. 169           |
| Régler l'éclimètre, dont le limbe contient un diamètre, 295.                                                                                                         | pag. 170           |
| Régler l'éclimètre topographique, dont le limbe est un secteur circulaire, 296.                                                                                      | pag. 171           |
| Description, 297, et règlement de l'éclimètre topographique-à-perpendiculaire, 298.                                                                                  | pag. 172           |
| Le rapporteur circulaire rendu éclimètre visuel et matériel, 299.                                                                                                    | pag. 173           |
| Description et usage de l'éclimètre des ouvriers, indiquant le rapport de la hauteur d'une pente à sa base, 300.                                                     | pag. 174           |
| Déterminer, à l'aide d'un perpendiculaire, le rayon parallèle à l'axe visuel qui tient au limbe d'un goniomètre, 301.                                                | pag. 175           |
| L'éclimètre à réflexion, 302.                                                                                                                                        | pag. 175           |
| L'éclimètre astronomique devenu répéteur, 303, 304. Prompt-manœuvre de cet instrument, 305.                                                                          | pag. 175, 176, 177 |
| Précaution indispensable dans l'observation des corps célestes, 306.                                                                                                 | pag. 178           |
| Toute double-observation d'une inclinaison zénithale accomplit les deux mesures: avec l'éclimètre à limbe successivement fixe et mobile, 307.                        | pag. 178           |

## LIVRE III.<sup>e</sup> : TOPOGRAPHIE RÉGULIÈRE.

### CHAPITRE I.<sup>er</sup> — CANEVAS GÉNÉRAL D'UNE CARTE.

Définition de la topographie, écrite ou dessinée, 310. Topographie proprement dite, 311. Carte topographique; circonstances où l'on doit employer la topographie régulière et la topographie irrégulière, 312. Le plan de repère d'une carte est horizontal, 313. Limite de l'étendue

|                                                                                                                                                                                                                     |                    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|
| terrestre qu'on peut rapporter au même horizon, 314. Planimétrie et nivellement, 315.                                                                                                                               | pag. 181, 182, 183 |
| En topographie régulière, on évite la mesure de grandes longueurs, 316.                                                                                                                                             |                    |
| Reconnaissance préliminaire pour choisir les sommets d'un canevas et en distribuer les stations, 317, 318.                                                                                                          | pag. 183, 184.     |
| Observations géodésiques de chaque station, 319.                                                                                                                                                                    | pag. 185           |
| Corrections des angles mesurés, pour les faire appartenir au canevas, 320.                                                                                                                                          | pag. 186           |
| Résolution des triangles du canevas, 321, et moyen d'en assurer les points conclus, 322.                                                                                                                            | pag. 186, 187.     |
| La mesure d'une seconde base vérifie les opérations d'un canevas très étendu, 323.                                                                                                                                  | pag. 187           |
| Calcul des coordonnées horizontales des sommets du canevas, et répartition de ces points sur des feuilles rectangulaires, 324, ou de forme quelconque, 325.                                                         | pag. 188           |
| Le plan de repère d'une carte est fixé par sa distance à un point de cette carte; différences et cotes de niveau, 326.                                                                                              | pag. 189           |
| Il y a deux méthodes pour niveler des points: selon qu'ils sont plus ou moins éloignés ou accessibles, 327.                                                                                                         | pag. 189           |
| La différence de niveau entre une station et un point de mire inaccessible se détermine au moyen de l'inclinaison zénithale de la droite qui unit ces points et de la projection horizontale de ladite droite, 328. | pag. 186           |
| L'inclinaison zénithale, observée d'un point sur un autre, est susceptible de plusieurs corrections avant d'entrer dans la formule de la différence de niveau de ces points, 329.                                   | pag. 190           |
| Recherche des corrections qui rendent vraie une inclinaison zénithale apparente, 330, 331, 332. Importance de ces corrections et limite des distances où l'on doit y avoir égard, 333.                              | pag. 190 à 193     |
| Calcul et disposition de la table des corrections qui ramènent au niveau vrai les observations zénithales et les différences de niveau apparent, 334, 335 et 356.                                                   | pag. 194 et 217.   |
| Nivellement entre plusieurs points: accessibles, 336, ou inaccessibles, 337.                                                                                                                                        | pag. 195, 196      |
| Canevas général du nivellement, 338; moyen d'assurer ses points conclus, 339.                                                                                                                                       | pag. 196, 197      |
| Une observation zénithale peut-être rapportée à un point désigné de la verticale de station; mais on n'accomplit cette transformation que pour rendre les inclinaisons zénithales réciproques, 340.                 | pag. 197           |
| Aperçu des observations qui coordonnent les descriptions de plusieurs régions terrestres, contigües ou séparées, 341.                                                                                               | pag. 198           |
| Exemple des principes géodésiques, pour diviser, en 8 feuilles, le levé des environs de Saint-Cyr, 342.                                                                                                             | pag. 198           |

- Détails de la reconnaissance, qui fait choisir les 17 sommets et préparer les 5 stations définitives du canevas, 343 à 348. pag. 199 à 208
- Mesures effectuées en une station, et usage du registre géodésique, 348 et 357. pag. 208 et 218
- Calcul des corrections angulaires, à l'horizon et au centre de station, 349, 358, après s'être précautionné contre les erreurs de pointé, 350. pag. 209, 210 et 219
- Disposition et calcul des 24 triangles du canevas, et mesure de la base, 351, 359. pag. 210 et 220
- Type du calcul des coordonnées horizontales des sommets, au moyen des différences de ces coordonnées, 352, 360. pag. 212 et 224
- Calcul des coordonnées verticales, par les différences de niveau des sommets, 353, 361. pag. 213 et 226
- Tableau des coordonnées des sommets du canevas, 354, 362. pag. 215 et 227.
- Désigner les feuilles dont l'intérieur du cadre et les marges contiennent chaque sommet; et dresser le bulletin des points qui doivent préparer une feuille, 355. pag. 216

## CHAPITRE II. — CANEVAS D'UNE FEUILLE TOPOGRAPHIQUE.

- Une feuille, préparée avec une base, doit être subdivisée par des points principaux, dont une reconnaissance facilite le choix, 363. pag. 228
- Il est avantageux de construire ce canevas, à mesure qu'on en observe les angles, et d'employer la planchette à cette opération, 364. pag. 228
- Déterminer graphiquement un et deux points accessibles, au moyen d'une base inaccessible, 365; des points inaccessibles, à l'aide de points accessibles; et un point accessible au moyen de trois repères inaccessibles, 366. pag. 229, 230
- Construire simultanément les trois arcs capables, employés dans le dernier problème : 1.<sup>o</sup> avec le rapporteur, 367; 2.<sup>o</sup> avec la planchette, 368. pag. 231, 232
- Circonstances où une station est immédiatement déterminable, 369. pag. 232
- Les limites du canevas horizontal d'une feuille topographique dépendent de la longueur de l'aiguille aimantée, qui est avantageusement employée pour décliner cette feuille, 370. pag. 233
- Canevas du nivellement d'une feuille topographique, 371. pag. 233
- Les limites de ce canevas tiennent à la précision de l'éclimètre; elles sont ordinairement plus étendues que celles du canevas horizontal, et rendent inappréciable, dans les nivellements de détail, la différence du niveau apparent au niveau vrai, 372. pag. 234

## CHAPITRE III. — LEVÉ DES DERNIERS DÉTAILS TOPOGRAPHIQUES.

|                                                                                                                                                                                                                                               |                    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|
| Les détails planimétriques se rattachent à des stations utilement déterminables, 373.                                                                                                                                                         | pag. 235           |
| Choix de la boussole, graphique ou numérique, pour goniomètre de détail; et règlement de la déclinaison graphique par rapport à cette boussole, 374.                                                                                          | pag. 235           |
| Construction préalable d'une échelle de pas ou de stadia, 375.                                                                                                                                                                                | pag. 236           |
| Exemple des opérations de détail, 376, 377, 378, et du levé par coordonnées, 379.                                                                                                                                                             | pag. 237, 238, 239 |
| Reconnaître si l'aiguille aimantée reste libre, détruire les effets de sa déviation et déterminer l'amplitude de cette déviation, 380.                                                                                                        | pag. 240           |
| L'arpentage n'emploie ordinairement que des longueurs, 381.                                                                                                                                                                                   | pag. 241           |
| Le soin à apporter aux détails d'un plan dépend de l'importance de ces détails, 382, 383.                                                                                                                                                     | pag. 241           |
| Les détails du nivellement se rattachent à des stations auxiliaires, 384, qu'il est commode de faire succéder à la planimétrie, 385; application, 386.                                                                                        | pag. 242, 243      |
| La formule des différences de niveau, devenue celle des différences de cotes, conduit à la détermination des cotes verticales indépendamment de l'échelle de la carte, 387. Exemple du calcul et de la construction des cotes de détail, 388. | pag. 244, 246      |
| Remarque permettant de projeter, avec la boussole, les points d'un nivellement de détail, 389.                                                                                                                                                | pag. 246           |
| Construire directement tous les points cotés d'une pente, 390, et, en particulier, ses points principaux, 391.                                                                                                                                | pag. 247           |
| Tableau graphique des valeurs à tg $\delta$ , 392.                                                                                                                                                                                            | pag. 248           |
| Différence de niveau entre un point accessible et un point inaccessible dont la distance n'est pas connue, 393.                                                                                                                               | pag. 248           |
| Nivellement au moyen de jalons, 394.                                                                                                                                                                                                          | pag. 249           |
| Différence de niveau de deux points accessibles, en employant le niveau visuel et la mire; coup de niveau, 395.                                                                                                                               | pag. 249           |
| Nivellement, par le transport de la mire, de points accessibles qu'on peut apercevoir d'un même lieu, 396.                                                                                                                                    | pag. 250           |
| Nivellement de points accessibles quelconques, 397.                                                                                                                                                                                           | pag. 251           |
| Extraire, d'un enchaînement nivelé, la différence de niveau de deux de ses points, 398.                                                                                                                                                       | pag. 252           |
| Nivellement par le transport du niveau autour de la mire, 399.                                                                                                                                                                                | pag. 253           |

|                                                                                        |          |
|----------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| Les cotes verticales se distribuent sur le terrain, en raison de son relief, 400, 401. | pag. 254 |
| Les matériaux topographiques, même imparfaits, préparent avantageusement un levé, 402. | pag. 254 |
| Registre des observations topographiques, 403.                                         | pag. 255 |
| Registre du nivellement avec la mire et le niveau visuel, 404.                         | pag. 256 |

## CHAPITRE IV. — RÉDACTION DE LA CARTE.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|
| La rédaction de la carte comprend quatre parties, 405.                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | pag. 257           |
| Esquisse du plan : au crayon, 406, et à la plume, 407, 408, 409.                                                                                                                                                                                                                                                                                                | pag. 257, 258, 259 |
| La recherche de l'équidifférence des verticales, ou de l'équidistance des sections principales d'une carte, conduit à admettre une équidistance graphique constante pour toutes les cartes, 410.                                                                                                                                                                | pag. 259           |
| Documents par lesquels on a choisi un demi-millimètre pour équidistance graphique des cartes, 411.                                                                                                                                                                                                                                                              | pag. 260           |
| L'équidifférence des cotes, déduite, pour chaque levé, de l'équidistance graphique constante, fait établir les sections principales de la carte, 412.                                                                                                                                                                                                           | pag. 261           |
| Les teintes, produites par les sections principales, n'étant pas assez apparentes sur les cartes topographiques, 413, on les a renforcées par des traits non-croisés, auxquels il est avantageux de donner la direction de plus grande pente, 414.                                                                                                              | pag. 262           |
| Modification des teintes formées de hachures non-croisées, 415.                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | pag. 262           |
| Les hachures minces, qui peuvent renforcer convenablement les teintes des zones principales, doivent être espacées en raison de leurs longueurs, 416.                                                                                                                                                                                                           | pag. 263           |
| Les essais, pour déterminer le rapport des longueurs de hachures à leurs espacements, montrent l'impossibilité de renforcer les teintes de toutes les pentes avec des hachures uniformes, 417; ce qui conduit à l'emploi de gros traits pour renforcer les teintes des pentes très rapides : en distinguant alors les pentes douces, et les pentes raides, 418. | pag. 263, 264      |
| Adoption de $\frac{1}{4}$ pour rapport entre les espacements et les longueurs des hachures de remplissage des pentes douces, 419.                                                                                                                                                                                                                               | pag. 265           |
| La loi d'espacement des hachures inégalement grosses est subordonnée à celle des hachures uniformes, 420.                                                                                                                                                                                                                                                       | pag. 265           |
| Dessin d'un modèle pour guider le grossissement des traits des pentes raides, 421.                                                                                                                                                                                                                                                                              | pag. 266           |

|                                                                                                                                                                        |               |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|
| Remplissage d'une zone à pente douce, 422, 423; nécessité des sections intermédiaires, 424.                                                                            | pag. 267      |
| Les espacements de teinte se complètent avec des fractions de hachure; on peut aussi diviser une zone en parties dont le remplissage aura l'espacement principal, 425. | pag. 268      |
| Les hachures doivent être dessinées dans le sens de la pente, 426.                                                                                                     | pag. 268      |
| On augmente, quelquefois, l'inclinaison des pentes très douces pour en faciliter le remplissage, 427.                                                                  | pag. 268      |
| Remplissage d'une zone à pente raide, par construction ou par imitation, 428.                                                                                          | pag. 269      |
| Remplissage des détails d'escarpements et de rochers, 429.                                                                                                             | pag. 269      |
| Les dénominations des mouvements de terrain résultent de la pénétration de deux surfaces convexes, ou croupes: col, défilé, thalweg, ravin, vallon et vallée, 430.     | pag. 270      |
| Remplissage du figuré de ces divers mouvements, 431.                                                                                                                   | pag. 270      |
| Exprimer les fractions de zones principales; emploi de traits pâles et amincis, 432.                                                                                   | pag. 270      |
| Effets des masses de rochers, 433.                                                                                                                                     | pag. 271      |
| <i>Modèle pour faire ressortir, avec le pinceau ou l'estompe, les masses d'un figuré topographique, 434.</i>                                                           | pag. 271      |
| Tableau des teintes uniformes et entremêlées, qui représentent les cultures du sol, les jardins potagers et les terrains marécageux; ordre du lavis, 435.              | pag. 273      |
| Teintes des édifices publics, des bâtiments militaires, des escarpements, des rochers, des arbres et des haies, 436.                                                   | pag. 274      |
| Manière de composer les teintes et de les entretenir dans les godets, de les placer et de les modifier sur le dessin, 437.                                             | pag. 274      |
| Préparer une feuille à être lavée, en la tendant par le collage, 438.                                                                                                  | pag. 275      |
| Les teintes conventionnelles altèrent les effets qui résultent du nivellement, 439.                                                                                    | pag. 275      |
| Genres d'écriture employés à la rédaction des cartes, 440; cadres des lettres droites et penchées, épaisseur de leurs traits, distance des lettres et des mots, 441.   | pag. 276      |
| Dessin des lettres capitales, 442; des lettres romaines et italiques, 443; des chiffres romains et arabes, 444.                                                        | pag. 277      |
| Copie des cartes dans une proportion voulue, 445, 446.                                                                                                                 | pag. 278, 279 |

#### CHAPITRE V. — CROQUIS PRÉPARATOIRE D'UN LÉVÉ.

|                                 |          |
|---------------------------------|----------|
| Croquis de la planimétrie, 447. | pag. 279 |
|---------------------------------|----------|



|                                                                                                                                                                                                |          |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| Relief ou mouvement de terrain d'une station, 448.                                                                                                                                             | pag. 280 |
| Manière d'estimer le sens et la rapidité d'une pente, 449, et de traduire graphiquement ce jugement, 450.                                                                                      | pag. 280 |
| Le croquis d'un mouvement de terrain résulte de l'observation de quatre de ses pentes les plus prononcées, 451.                                                                                | pag. 281 |
| L'habitude de la composition des pentes permet de dessiner et de raccorder promptement les croquis de plusieurs stations, pour en former une reconnaissance utile à la rédaction du levé, 452. | pag. 282 |
| Renseignements descriptifs et statistiques à recueillir sur le terrain, 453.                                                                                                                   | pag. 282 |

## LIVRE IV.<sup>e</sup> : TOPOGRAPHIE IRRÉGULIÈRE.

### CHAPITRE I.<sup>er</sup> — CANEVAS D'UN LEVÉ IRRÉGULIER

|                                                                                                                                                                                       |          |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| Utilité de la topographie irrégulière, choix de l'échelle, nécessité d'un canevas, 454. Dans un levé irrégulier, on doit évaluer plus de longueurs que d'angles, 455.                 | pag. 283 |
| On obtient les grands côtés d'un canevas irrégulier : par les expériences sur le son, par les développements itinéraires et par l'amplification des cartes géographiques, 456.        | pag. 284 |
| La boussole à la main et les gonimètres à réflexion servent à la mesure des angles que les côtés n'ont pu faire calculer; division d'un canevas en feuilles de forme quelconque, 457. | pag. 284 |
| Nivellement par les observations barométriques, 458.                                                                                                                                  | pag. 285 |

### CHAPITRE II. — DÉTAILS D'UN LEVÉ IRRÉGULIER.

|                                                                                                                             |          |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| Stations destinées à régler l'échelle de pas et la boussole graphique, devant servir aux détails d'un levé irrégulier, 459. | pag. 285 |
| Points de repère déterminés en même temps que les détails, 460.                                                             | pag. 286 |
| Utilité et emploi des matériaux topographiques dans les levés irréguliers, 461.                                             | pag. 286 |
| Levé des lieux habités, à une échelle moindre que $\frac{1}{10000}$ , 462.                                                  | pag. 287 |
| Composition de la boussole graphique et de l'équerre d'arpenteur employées dans les levés irréguliers, 463.                 | pag. 287 |
| Nivellement des détails irréguliers, 464.                                                                                   | pag. 287 |
| Rédaction d'une Carte irrégulière, 465.                                                                                     | pag. 288 |

**PROGRAMME DES LEÇONS ET EXERCICES DU COURS DE  
TOPOGRAPHIE, FAIT A LA PREMIÈRE DIVISION  
DE L'ÉCOLE MILITAIRE.**

*Nota.* — L'introduction à la Topographie, ainsi que le chapitre des instruments et des moyens graphiques, ont été enseignés à la seconde division.

**NOVEMBRE — 1.<sup>re</sup> LEÇON : Révision de la Géométrie descriptive.**

Description régulière et irrégulière des corps, 1 à 10. Echelle graphique générale, 10.

Représentation des surfaces et des cotes, 11. Sections parallèles, 35. Cotes et sections principales, 35. L'equidifférence des cotes est liée à l'échelle, 36. Sections intermédiaires, 37, 38.

Intersection des surfaces, 40; et construction des profils, 42.

—

**2.<sup>e</sup> LEÇON : Révision de la Trigonométrie.**

Solution numérique et solution graphique des questions trigonométriques, 66. Rattacher un point à une base; rattacher des points entre eux, 67. Coordonner des points par des mesures d'angles, en les rattachant à une ou plusieurs bases, 68, 69, 70.

Déterminer un point accessible, au moyen : 1<sup>o</sup> de deux points inaccessibles, 73; 2<sup>o</sup> de trois repères inaccessibles, 77; 3<sup>o</sup> de deux repères et d'une direction, 75, 76.

Indiquer la meilleure forme à donner aux triangles qui lient les bases auxiliaires, 82, et la limite d'étendue de ces triangles, 83.

—

**3.<sup>e</sup> LEÇON. : Canevas de la Planimétrie.**

Topographie régulière, topographie irrégulière; l'horizon pris pour plan de projection topographique, 310 à 314. Nécessité d'un canevas, 316. Reconnaissance pour choisir les sommets de ce canevas, 317. Distribution des observations géodésiques, 318; et transformation des angles observés en angles du canevas, 319, 320.

Marche à suivre pour calculer les triangles du canevas, 321, 322, et les coordonnées horizontales de ses sommets, 324. Division du canevas en feuilles de détail, 354, 355.

—

**4.<sup>e</sup> LEÇON : Canevas du Nivellement.**

Différence de niveau par deux méthodes, 326, 327. Différence de niveau entre une station et un point de mire inaccessible, 328.

Nivellement de points aperçus d'une même station, 336. Nivellement de points accessibles, d'où l'on aperçoit un même point inaccessible, 337. Nivellement composé, et registre des coordonnées verticales, 338.

### DÉCEMBRE. — 5.<sup>e</sup> LEÇON : *Détails de la Planimétrie.*

Caneras d'une feuille de détail, 363 à 367. Station déterminable par quatre moyens, 369.

Rattaacher les derniers détails d'un plan à une station centrale, 373, et par coordonnées, 379. Croquis et registre de la planimétrie, 447.

### 6.<sup>e</sup> LEÇON : *Détails du Nivellement.*

Calcul des cotes verticales d'une station et des points de détail inaccessibles qui l'avoisinent, 384, 385, 386. Nivellement de points accessibles, 395, 396, 397.

Construction des cotes verticales, 387. Croquis et registre du nivellement, 448, 449, 453.

### 7.<sup>e</sup> LEÇON : *Rédaction de la Carte.*

Conventions admises pour la rédaction d'un plan, 405 à 410, 435 à 447. Figuré géométrique du nivellement, et choix du demi-millimètre pour équidistance graphique commune à toutes les cartes, 410, 411, 412.

Dénomination des mouvements de terrain, 430.

### 8.<sup>e</sup> LEÇON : *Suite de la rédaction de la Carte.*

Les sections principales ne suffisent pas au dessin des cartes, dont l'échelle est inférieure au  $\frac{1}{1000}$ , 413. Choix des hachures de plus grande pente pour renforcer les teintes des sections principales, 414. Énoncer les moyens de modifier les teintes par des traits non croisés, 415. On est conduit à distinguer les pentes raides des pentes douces, 418. Les hachures minces des pentes douces sont espacées au quart de leurs longueurs, 416, 419. Les gros traits des pentes raides se dessinent par l'imitation d'un modèle, 421.

### JANVIER. — 9.<sup>e</sup> LEÇON : *Suite de la rédaction de la Carte.*

Remplissage des pentes douces, 422 à 428. Remplissage des pentes raides, 428; des escarpements et des rochers, 429.

Remplissage d'un col, d'une vallée et d'un ravin, 431. Exprimer une fraction de zone principale; emploi de traits pâles et amincis, 432. Effets

des masses de rochers, 433. Énoncer le moyen de teinter le nivellement par le pinceau et l'estompe, 434.

### 10.<sup>e</sup> LEÇON : *Évaluation des Distances horizontales.*

On mesure les distances avec les règles géodésiques, 131; la chaîne, 132; le cordeau, 133; le pas de l'homme et l'allure du cheval, 134; le temps, 150, 151; le son, 152, 153.

Régler ces moyens numériquement et graphiquement, 135, 136. Déterminer des repères dans l'alignement de deux points, 137, 138. Réduction, à l'horizon, des longueurs inclinées; limite et table de cette réduction, 155.

### 11.<sup>e</sup> LEÇON : *Généralités sur les Goniomètres.*

Définition des goniomètres, 168, et de l'alidade, 158. Les goniomètres sont à limbe fixe ou à limbe mobile, 169. Station exacte et approchée d'un goniomètre, 171. Coup d'alidade, incertitude de lecture d'un angle, 172. Sens des coups d'alidade et des angles par rapport à la numération du limbe, 173, 174.

Second tuyau visuel qui assure la fixité du repère d'un goniomètre, 179.

Régler à zéro ce tuyau visuel-déclinateur, 184.

Énoncer les précautions dues à l'emploi de l'alidade plongeante, 190.

### 12.<sup>e</sup> LEÇON : *La Boussole numérique.*

L'aiguille aimantée servant de repère au goniomètre, devenu alors boussole, 191. Déclinatoire, 192; limite de son emploi, 193. Imposer à une boussole la graduation d'un coup d'alidade désigné, 199. Préférence donnée, en topographie, à la boussole numérique à limbe mobile, manœuvre de cet instrument, 200, 201.

Usage de la boussole numérique dans les derniers détails d'un plan, 374.

Reconnaître si l'aiguille aimantée reste libre, et, obvier à ses dérangements accidentels, 380.

### FÉVRIER. — 13.<sup>e</sup> LEÇON : *Revision du Vernier, et du Rapporteur angulaire.*

Théorie du vernier simple, 108. Son usage, 109. Incertitude de lecture due au vernier, 110.

Usage du rapporteur circulaire numéroté : 1<sup>o</sup> dans le sens des inclinaisons, 93; 2<sup>o</sup> dans le sens opposé aux inclinaisons, 94. Préférence accordée à ce dernier, 95.

Emploi de la règle du rapporteur, 96, 97; détruire son erreur de marge, 98. Décrire un arc capable avec le rapporteur, 99, 100.

#### 14.<sup>e</sup> LEÇON: *Suite du Rapporteur.*

Coup d'œil du rapporteur, 120. Tracer un tour-d'horizon avec le rapporteur, 122, et appuyer ce tour-d'horizon sur un côté désigné, 123.

La boussole libre donne la même déclinaison au rapporteur, dans toutes ses stations, 124.

Limbe et déclinaison complémentaire du rapporteur, 125.

#### 15.<sup>e</sup> LEÇON: *La Planchette.*

Description de la planchette la plus simple, 126. Observer un tour-d'horizon, 128, et l'appuyer sur un côté donné, 129. Tracer des parallèles, 130, 131. Transporter un angle d'un endroit à l'autre de la tablette, 132. Diviser un angle en deux parties égales, 133, et tracer des perpendiculaires, 134. Décrire l'arc capable d'un angle désigné, 135.

#### 16.<sup>e</sup> LEÇON: *Suite de la Planchette; la Boussole graphique et l'Angle d'arpenteur.*

Exécuter le canevas d'une feuille avec la planchette, 364. Application à la détermination d'un point accessible : 1.<sup>o</sup> au moyen de deux repères inaccessibles, 365; 2.<sup>o</sup> en s'appuyant sur trois repères, 368; 3.<sup>o</sup> avec deux points et une déclinaison, 370.

Le déclinatoire transforme la planchette en boussole graphique, 136.

L'angle d'arpenteur, 138. L'équerre d'arpenteur, 139; son emploi dans l'arpentage, 379.

#### MARS. — 17.<sup>e</sup> LEÇON: *Niveaux, et Déclinatoires verticaux.*

Le niveau rend un goniomètre éclinomètre, 158. Principes de construction des niveaux et déclinatoires verticaux, 159, 160.

Niveau-d'eau, 161; niveau-siphon, 162; limite de leur emploi, 163.

Niveau et déclinatoire-à-perpendiculaire, leur sensibilité différente de l'apothème, 164; limite de leur emploi, 165.

Niveau et déclinatoire-à-bulle d'air, limite d'emploi, sensibilité et précision de ces instruments, 166, 167, 168.

Expérience qui règle chacun des trois niveaux relativement à sa base, 170.

Caler horizontalement une longueur et un plan, pendant qu'on règle le niveau, 171, 172.

18.<sup>e</sup> LEÇON : *Éclimètres, et Niveaux visuels.*

Éclimètre à limbe fixe ou mobile, 280. Station de l'éclimètre, 282; limite du défaut de verticalité du limbe, 288. Règlement du déclinatoire vertical pour des observations peu étendues, 287.

Éclimètre topographique, à bulle d'air, 294, à perpendicule, 297.

Le rapporteur circulaire devenu éclimètre visuel et matériel, 299.

L'éclimètre des ouvriers, ou niveau de maçon, 300.

Les niveaux visuels, 274; leur règlement pour de petites distances, 275.

Le niveau-d'eau visuel, quand il est spontané 276, est soumis à plusieurs conditions, 377.

La Mire, 278, 279.

19.<sup>e</sup> LEÇON : *Construction du Nivellement.*

Rappeler comment les cotes se calculent en fonction de l'équidifférence et indépendamment de l'échelle, 387, 388.

Caleuler et construire les détails d'une station de nivellement, 390, 391, 392.

Figuré géométrique du nivellement à l'aide des croquis préparatoire; 412.

JUN. — 20.<sup>e</sup> LEÇON : *Topographie irrégulière.*

Topographie irrégulière utile aux Reconnaissances, 454. Canevas planimétrique d'un levé irrégulier, et sa division en feuilles de détail, 455, 456, 457. Canevas du nivellement par les observations barométriques, 458.

Détails d'un plan irrégulier, 459, 460, 462, 463, aidés par toute espèce de matériaux topographiques, 461. Levé à une échelle moindre que

$\frac{1}{10000}$ , 462. Nivellement des détails irréguliers, 464.

Rédaction d'une carte irrégulière, 465.

21.<sup>e</sup> LEÇON : *Instruction sur les Levés irréguliers au  $\frac{1}{10000}$ .*JUILLET. — 22.<sup>e</sup> LEÇON : *Instruction sur les Reconnaissances d'Itinéraires au  $\frac{1}{15000}$ .*

Les études de dessin ont lieu : du 1.<sup>er</sup> novembre au 10 août ; elles se coordonnent avec les leçons orales, et parcourent progressivement les difficultés de la rédaction topographique.

Ces études consistent en :

Tableau des écritures et des teintes conventionnelles. . . en 2.<sup>e</sup> division.

1.<sup>re</sup> carte (dite de Saint-Blaise) ; sections principales,

échelle =  $\frac{1}{2500}$  . . . . . 8 décembre.

2.<sup>e</sup> carte (dite de Carrières) ; hachures au crayon,

échelle =  $\frac{1}{5000}$  . . . . . 1.<sup>er</sup> février.

3.<sup>e</sup> carte (dite de Poissy) ; hachures à la plume,

échelle =  $\frac{1}{10000}$  . . . . . 1.<sup>er</sup> avril.

Construction du nivellement, sur une esquisse contenant les cotes des stations ainsi que les directions, inclinaisons zénithales et longueurs des pentes avoisinant chaque station ; échelle =  $\frac{1}{4000}$  . . . . . 15 mai.

4.<sup>e</sup> carte (dite de Chambourcy), réduite de  $\frac{1}{10000}$   
au  $\frac{1}{30000}$  ; hachures à la plume. . . . . 1.<sup>er</sup> août

Rédaction des trois Levés . . . . . 10 août.

*Tout dessin est accompagné de son échelle graphique et d'un profil.*

Chaque Élève est exercé sur le terrain pendant onze séances ; à savoir :

2 séances de cinq heures : usage des instruments dans la cour de Wagram. . . . . en avril.

4 séances de cinq heures : levé régulier dans les dépendances de l'École. . . . . mai.

3 séances de sept heures : levé irrégulier au  $\frac{1}{10000}$ , dans les environs de Saint-Cyr. . . . . juin.

2 séances de sept heures : reconnaissance au  $\frac{1}{10000}$   
d'un itinéraire de 5 kilomètres . . . . . juillet.

EXERCICES DE TOPOGRAPHIE DANS L'ÉCOLE.

*Usage des Instruments, dans la cour de Wagram.*

1.<sup>re</sup> séance. Alignements, 137, 138. Mesure d'une base avec la chaîne, 132. Préparation d'un tour-d'horizon, 343. Station de la planchette, 227, 228, 229. Rapporter la base au  $\frac{1}{1000}$ , 102.

Déterminer : 1.<sup>o</sup> des points inaccessibles, 169; 2.<sup>o</sup> une station à l'aide de deux repères inaccessibles 365; 3.<sup>o</sup> l'échelle de pas pour les détails, 375.

2.<sup>e</sup> séance. Déterminer une station au moyen de trois repères inaccessibles : 1.<sup>o</sup> avec la planchette, et régler le déclinatoire, 368; 2.<sup>o</sup> avec un goniomètre numérique, et décliner le rapporteur. Cas où le goniomètre devient une boussole, 367.

Lever quelques détails, en employant successivement la boussole graphique et la boussole numérique, 378. Insister sur les croquis préparatoires, 447.

Jalonner un contour donné sur le plan.

*Planimétrie régulière, dans les dépendances de l'École.*

1.<sup>re</sup> séance. Le clocher de Saint-Cyr et la cheminée du garde-polygone étant placés sur la feuille, à l'échelle d'environ  $\frac{1}{2000}$  : on déterminera, dans le Polygone, deux stations servant à rattacher plusieurs points principaux, dont on fera une légende. On tracera, en même temps, l'appui du déclinatoire et la déclinaison du rapporteur, 376. On construira l'échelle de pas, 377, pour l'employer, aussitôt, à tracer les détails qui avoisinent les deux stations.

2.<sup>e</sup> séance. On lèvera les détails du Polygone, tant à la boussole graphique qu'à la boussole numérique, et aussi par coordonnées, 379.

3.<sup>e</sup> séance. On continuera la triangulation graphique dans le Champ-de-Mars, dont on lèvera les détails, ainsi que ceux des bosquets et jardins voisins de l'Infirmerie.

4.<sup>e</sup> séance. On terminera les détails de toutes les parties de l'École.



**APPLICATION**  
**DE LA GÉOMÉTRIE**  
**A LA TOPOGRAPHIE.**

---

**LIVRE I.<sup>er</sup> : INTRODUCTION A LA TOPOGRAPHIE.**

---

**CHAPITRE I.<sup>er</sup> : GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.**

*Généralités.*



1. Un corps est mathématiquement défini : quand on connaît le procédé mathématique au moyen duquel chacun de ses éléments peut être déterminé, de forme et de position.

2. Deux polyèdres semblables ayant leurs côtés homologues proportionnels ; l'un de ces corps pourra servir à évaluer ou à construire les éléments du volume de l'autre, et par conséquent à le définir : au moyen du rapport constant qui existe entre les dimensions homologues desdits polyèdres.

On nomme ÉCHELLE le rapport nécessaire à la comparaison de volumes semblables.

3. En géométrie descriptive, on définit les corps au moyen de projections planes, dites ÉPURES.

Lorsque l'étendue d'un corps s'oppose à ce qu'il soit représenté par ses projections *naturelles*, l'épure descriptive se rapportera à un polyèdre semblable à ce corps, et sera accompagnée de l'échelle de comparaison.

4. En supposant le corps naturel et celui que décrit l'épure, semblablement situés dans l'espace, c'est-à-dire, ayant leurs côtés homologues parallèles : ces côtés se-

ront proportionnels à leurs projections; et une seule échelle servira à comparer les projections, aussi bien que les longueurs, des dimensions naturelles et graphiques.

5. Si on représente par  $n$  le nombre des unités de longueur  $L$  comprises dans une dimension  $d$  de l'épure; et par  $N$  le nombre des mêmes unités contenues dans la dimension naturelle  $D$  qui lui est homologue, l'échelle sera exprimée

par  $\frac{d}{D}$  ou  $\frac{nL}{NL}$  ou  $\frac{n}{N}$ , dont la transformation en  $\frac{1}{\left(\frac{N}{n}\right)}$  ou  $\frac{1}{M}$ ,

permettra d'énoncer l'échelle  $\frac{d}{D}$  par  $\frac{1}{M}$ :  $M$  étant plus grand que l'unité quand les dimensions graphiques seront inférieures aux dimensions naturelles, comme nous serons ordinairement dans le cas de l'admettre; et alors, chaque échelle sera distinguée par un seul nombre.

6. Cette relation  $\frac{d}{D} = \frac{1}{M}$ , produisant  $D = M d$  et  $d = \frac{D}{M}$ , montre comment on calcule une dimension naturelle  $D$  au moyen de sa dimension homologue graphique  $d$ , et réciproquement.

7. Toute opération graphique comportant des erreurs qui échappent à nos sens; ces erreurs, lorsqu'on passera des dimensions graphiques aux dimensions naturelles, altéreront d'autant plus celles-ci que  $M$  sera plus grand: en sorte que l'échelle  $\frac{1}{M}$  fera juger de la précision avec laquelle on reproduira le corps naturel d'après l'épure, et exprimera, par conséquent, le but d'exactitude de la description graphique.

Et, si on admet que la dixième partie d'un millimètre soit inappréciable sur l'épure, la quantité  $\frac{M^m}{10000}$  sera l'erreur qui pourra affecter les dimensions naturelles déduites des dimensions graphiques: et réciproquement, cette erreur  $\frac{M^m}{10000}$ , dans la mesure des dimensions naturelles, n'en occasionnera pas d'apparente sur l'épure.

Il suffira donc d'évaluer les dimensions naturelles d'un

corps à  $\frac{M^m}{10000}$  près, pour qu'il n'en résulte pas d'erreur appréciable sur la description graphique de ce corps, à l'échelle  $\frac{1}{M}$ .

8. Lorsque la description graphique d'un corps sera destinée à préciser la figure de ce corps, ou à préparer la modification de quelques-unes de ses parties, il faudra obtenir les éléments qui servent à construire l'épure, avec toute la rigueur que comporte l'échelle choisie. On dit alors que la description est *régulière*.

Quelque peu exacte qu'ait été l'évaluation des éléments constitutifs d'une épure, il sera toujours possible de tracer régulièrement celle-ci, pourvu que l'échelle rende graphiquement inappréciable la plus grande erreur encourue, au moyen de  $M = 10000$ .

On conçoit, cependant, des limites où cette régularité deviendrait illusoire, par le peu d'utilité d'une épure à trop petite échelle.

9. Quand on se proposera seulement de montrer, par une épure, l'existence et la position relative des diverses parties d'une surface, ou son *Portrait*: il suffira d'établir avec soin les principales limites de cette épure, et d'en coordonner les détails par des moyens moins exacts que ne l'indique l'échelle, dont le dénominateur  $M$  dépendra de la grandeur plus ou moins exagérée de ces détails. Une telle description est alors *irrégulière*.

10. De  $\frac{d}{D} = \frac{1}{M}$ , on tire  $\frac{D}{L} = d : \frac{L}{M}$  exprimant que toute dimension naturelle  $D$  contient l'unité de mesure  $L$  comme la dimension graphique homologue  $d$  contient l'unité graphique  $\frac{L}{M}$  ou  $l$ .

En sorte que le tableau des multiples entiers et fractionnaires de l'unité graphique servira à déterminer, par des ouvertures de compas, les relations entre des dimensions naturelles et celles qui leur correspondent graphiquement. Et comme, dans les descriptions régulières, ce tableau procurera

d'autant plus de précision que sa dernière partie sera plus tenue, on le composera d'unités, dizaines et centaines de cette plus petite subdivision. (Voir la *Construction des Échelles*. § 101, Livre II.e).

On pourra même adopter une partie quelconque  $l$  pour unité graphique, et en déduire l'unité de mesure  $m$  ou  $L$ : tellement que le tableau des multiples de cette même partie  $l$  deviendra une échelle graphique générale, dont l'unité de mesure naturelle  $m$  ou  $L$  variera avec l'échelle numérique  $\frac{1}{M}$ .

D'après cela, il serait avantageux d'employer le tableau des multiples du déci-millimètre (*fig. 30*) pour échelle unique des descriptions régulières, en adoptant  $\frac{M^m}{10000}$  comme unité de mesure; car toute dimension graphique serait estimée avec la chance d'erreur négligeable  $\frac{1^m}{10000}$ , et alors l'unité de mesure deviendrait :

|                 |             |                    |                          |                 |
|-----------------|-------------|--------------------|--------------------------|-----------------|
| Centimètre      | à l'échelle | $\frac{1}{100}$    | } 1 déci-millimètre pour | Centimètre.     |
| Décimètre.      | .....       | $\frac{1}{1000}$   |                          | Décimètre.      |
| Quart de mètre. | .....       | $\frac{1}{2500}$   |                          | Quart de mètre. |
| Demi-mètre.     | .....       | $\frac{1}{5000}$   |                          | Demi-mètre.     |
| Mètre.          | .....       | $\frac{1}{10000}$  |                          | Mètre.          |
| Mètre et demi.  | .....       | $\frac{1}{15000}$  |                          | Mètre et demi.  |
| Double mètre.,  | .....       | $\frac{1}{20000}$  |                          | Double-mètre.   |
| Déca-mètre.     | .....       | $\frac{1}{100000}$ |                          | Déca-mètre,     |
| .....           | .....       | .....              |                          | .....           |

#### *Système de représentation graphique par une seule projection.*

11. Un corps est déterminé, de forme et de position, par les projections de ses sommets polyédriques sur un plan, et la désignation des distances des mêmes sommets audit plan.

L'épure descriptive d'un corps consistera donc en une projection nommée **PLAN** du corps, dont chaque point remarquable portera la *cote* de sa distance au sommet polyédrique correspondant.

Et, quand cette épure devra servir à des modifications matérielles, on en dressera graphiquement les cotes utiles, sur des plans perpendiculaires à celui de repère, § 42, p. 17.

12. Un point est représenté par sa projection, aidée de sa cote de distance au plan de repère.

13. Une droite; étant déterminée par deux points, sera représentée par les projections de ces points accompagnées de leurs cotes.

Les points, qui déterminent une parallèle au plan de repère, ont la même cote. Une droite, perpendiculaire audit plan, se représente par un point non coté.

14. Etant donnée la projection d'un point appartenant à une droite connue, trouver la cote de ce point.

Une cote étant donnée, trouver la projection du point qui lui correspond sur une droite connue.

Soient  $a, b$  (fig. 1) les projections de points cotés  $a', b'$  et déterminant une droite : rabattons cette droite sur le plan de repère, au moyen des distances  $aa, bb$  correspondant aux cotes  $a', b'$ ; soit  $x$  un point projeté en  $x$  par la perpendiculaire  $x\alpha$  cotée  $x'$ : on aura  $\frac{x\alpha}{QA} = \frac{BF}{FA}, \frac{x\alpha}{QA} = \frac{QA}{FA}$  et  $\frac{x' - a'}{b' - a'} = \frac{xa}{ba}$ ; d'où l'on tire les valeurs  $x' - a' = \frac{xa}{ba} (b' - a')$ ,  $xa = ba \left( \frac{x' - a'}{b' - a'} \right)$  qui répondent aux questions proposées.

Les longueurs  $xa$  et  $ba$  s'estiment en fonction d'une très petite partie telle que le déci-millimètre, à l'aide du tableau des multiples de cette partie (fig. 30, PL. III).

La trace d'une droite sur le plan de projection, étant cotée zéro, sera déterminée en faisant  $x' = 0$  dans la valeur générale de  $xa$ , c'est-à-dire par  $oa = -a' \frac{ba}{b' - a'}$ .

En choisissant la trace  $o$  d'une droite, pour l'un de ses points déterminants, on aura généralement  $\frac{x\alpha}{bo} = \frac{x'}{b'}$ .

15. Quand on devra remarquer plusieurs points d'une droite, tant par leurs projections que par leurs cotes: on sim-

plifiera la recherche des unes et des autres, par une construction préparatoire déduite de la relation précédente, qui, pouvant être écrite  $x' - a' = xa : \left(\frac{ba}{b' - a'}\right)$ , s'interprétera ainsi : 1.<sup>o</sup> la cote  $x'$ , d'un point projeté en  $x$ , excédera la cote donnée  $a'$  d'autant d'unités que  $xa$  contient de fois  $\left(\frac{ba}{b' - a'}\right)$ ; 2.<sup>o</sup> la longueur  $xa$  contiendra cette même partie  $\left(\frac{ba}{b' - a'}\right)$  autant de fois qu'il y a d'unités dans  $(x' - a')$ .

D'où il suit que, si l'on divise l'intervalle  $ba$ , en  $(b' - a')$  parties égales, pour distribuer ces parties sur la projection indéfinie  $ac$  (fig. 1) : on reconnaitra immédiatement combien une longueur  $xa$  contiendra de fois  $\left(\frac{ba}{b' - a'}\right)$ , de même que l'on pourra composer une distance  $xa$  d'autant de parties  $\left(\frac{ba}{b' - a'}\right)$  que l'indiquera le nombre connu  $(x' - a')$ . Et cette opération sera encore facilitée, en écrivant les cotes des points équidistants :  $(a' + 1)$ ,  $(a' + 2)$ ,  $(a' + 3)$ , ... de  $a$  en  $b$ ; et  $(a' - 1)$ ,  $(a' - 2)$ ,  $(a' - 3)$ , ... de  $a$  en  $o$ .

Soit proposé, pour exemple, de préparer la droite  $oc$  (fig. 1), ayant pour points déterminants  $a$  et  $b$ , cotés 6 et 13,5 : je construis la partie  $\left(\frac{ab}{13,5 - 6}\right) = \frac{ab}{7,5} = \frac{2ab}{15} = at$  que je porte sur  $ac$  et  $ao$ ; autant que possible, en accompagnant les points de division des cotes 7, 8, 9 ... de  $a$  en  $e$ , et 5, 4, 3, 2, 1, 0 de  $a$  en  $o$ . Alors, la cote d'un point  $x$  sera comprise entre 8 et 9, soit  $\left(8 + \frac{3}{4}\right)$ ; et, réciproquement, la cote  $\left(4 + \frac{1}{2}\right)$  désignera le milieu de l'intervalle qui sépare le point 4 du point 5.

16. En supposant que  $h$  soit l'unité de cote,  $\frac{xQ}{QA}$  vaudra  $(x' - a') h$  (fig. 1), et, à cause de  $\frac{xQ}{QA} = \lg BAF = \frac{1}{\lg(1^d - BAF)}$ , on aura  $x' - a' = \frac{xa}{h \lg(1^d - BAF)}$ .

D'où il résulte que, étant données la projection indéfinie

$\alpha\alpha'$  d'une droite, et sa pente  $\Delta\alpha\alpha' = p$  sur le plan de repère :  
 1.° la différence  $(x' - x)$ , entre les cotes de deux points quelconques  $x$  et  $x'$ , sera égale au nombre de fois que l'intervalle de projection  $\alpha\alpha'$  contiendra la longueur  $h \operatorname{tg}(1^\circ - p)$ .  
 2.° Cette longueur  $h \operatorname{tg}(1^\circ - p)$ , partant d'un point  $\alpha$  coté  $x$ , projettera les points équidistants ayant pour cotes :  $(x' + 1)$ ,  $(x' + 2)$ ,  $(x' + 3)$ , ... dans un sens, et  $(x - 1)$ ,  $(x - 2)$ ,  $(x - 3)$ , ... dans le sens opposé ; chaque sens étant, d'ailleurs, indiqué par le signe de  $\operatorname{tg}(1^\circ - p)$ .

Dans le but de faciliter la détermination des différences de cotes, nous avons formé une table des valeurs, en décimillimètres, de  $h \operatorname{tg}(1^\circ - p)$  ou  $h \operatorname{tg} \delta$ , § 309, Liv. II, en adoptant  $h = \frac{1}{2}$  millimètre ou 5 décimillimètres, c'est-à-dire, en quintuplant les tangentes naturelles des angles correspondants,

17. Lorsque deux droites se rencontrent : la cote, qui correspond à l'intersection de leurs projections, doit être la même en la concluant de l'une ou l'autre droite.

Pour trouver le point de rencontre de deux droites qui ont le même plan projetant : soient  $o$  et  $o'$  les traces de ces droites (fig. 2 et 3),  $a$  et  $b$  leurs seconds points déterminants auxquels on supposera la même cote ; imaginons les droites rabattues sur le plan de repère, on aura :  $\frac{\text{cote } c}{\text{cote } a} = \frac{oc}{oa} = \frac{oc}{oa}$ , et, de ce que

$$\frac{oc}{ca} = \frac{oo'}{ab}, \quad \frac{oc}{oc \pm ca} = \frac{oc}{oa} = \frac{oo'}{oo' \pm ab}; \text{ il résultera :}$$

1.° cote  $c = \text{cote } a \frac{oo'}{oo' \pm ab}$  ; 2.°  $oc = oa \frac{oo'}{oo' \pm ab}$ . Le signe de  $ab$ , dépendant du sens de cette longueur par rapport à  $oo'$ , sera positif dans la fig. 2 et négatif dans la fig. 3.

La préparation préliminaire des droites données en *échelles de cotes*, conduira promptement au point qui aura la même cote sur l'une et l'autre ligne. (Voir le § 28, page 10, pour une autre construction.)

18. Des droites parallèles ont leurs projections parallèles,

et les points de ces lignes, situés à égales distances de leurs traces, ont des cotes pareilles.

On mènera, par un point projeté  $r$  et coté  $r'$  (fig. 4), une parallèle à la droite  $ba$ ; en portant sur la projection de cette parallèle une longueur  $rq$  égale à  $ba$ , et en concluant la cote  $q'$  de la condition  $r' - q' = b' - a'$ .

19. La ligne de plus grande pente d'un plan par rapport à un autre est celle dont l'inclinaison sur ce dernier forme l'angle dièdre. En effet, imaginons (fig. 5) par un point quelconque  $a$  du plan  $PV$  une perpendiculaire  $ac$  sur le plan de repère  $PR$ ; la ligne de plus grande pente du plan  $PV$  sur le plan  $PR$  sera celle de toutes les obliques à ce dernier, menées par  $a$  dans le plan  $PV$ , qui se rapprochera le plus de la perpendiculaire  $ac$ , c'est-à-dire, la plus courte des droites conduites de  $a$  sur l'intersection  $bu$  des deux plans, ou la perpendiculaire  $ad$  à cette intersection: et, si on prend  $bd = gd$ ,  $ab$  sera égale à  $ag$ , par suite  $cb$  égalera  $cg$  et  $cd$  sera perpendiculaire à  $bu$ , ce qui rendra  $adc$  l'angle des deux plans.

En concevant, par le point  $a$  dans le plan  $PV$ , une parallèle  $ef$  au plan  $PR$ , elle sera, ainsi que sa projection  $kn$ , parallèle à  $bu$ , ensorte que  $ad$  sera perpendiculaire à  $ef$ , et  $dc$  le sera à  $kn$ . Donc: 1.<sup>e</sup> par un point d'un plan, on ne peut mener qu'une seule ligne de plus grande pente par rapport à un autre plan; 2.<sup>e</sup> cette ligne est perpendiculaire à la section parallèle conduite par le même point, et sa projection sur le plan de repère est aussi perpendiculaire à celle de la section parallèle.

20. Cela posé, une surface quelconque pouvant être considérée comme formée de faces polyédriques se trouvant dans ses divers plans tangents; l'élément de la ligne de plus grande pente, passant par un point de cette surface, sera dirigé selon la ligne analogue du plan tangent à ce point; c'est-à-dire, suivant l'intersection de ce plan tangent avec un plan normal, en même temps, à la surface et au plan de repère.

21. Ainsi, 1.<sup>e</sup> par un point d'une surface quelconque, il



passera autant d'éléments différents de ligne de plus grande pente qu'on y pourra mener de plans tangents ou de normales ; de sorte que les surfaces continues, dont chaque point comporte un seul plan tangent, n'auront qu'une ligne de plus grande pente par point, à moins que le plan tangent ne se trouve parallèle au plan de repère, auquel cas tous les plans normaux donneront des éléments différents de plus grande pente. 2.<sup>e</sup> Chaque ligne de plus grande pente sera perpendiculaire aux sections parallèles qu'elle rencontre. 3.<sup>e</sup> Les projections de ces lignes sur le plan de repère seront, aussi, perpendiculaires à celles des sections parallèles.

22. Si donc, on obtient les projections de sections parallèles d'une surface ; la projection d'une ligne de plus grande pente de cette surface, par rapport au plan de repère, aura ses éléments perpendiculaires aux projections des sections parallèles ; et cette projection de plus grande pente sera d'autant plus exacte, que l'on aura tracé davantage de sections parallèles de la surface.

23. Un plan sera déterminé par trois points non en ligne droite, nécessitant trois cotes ; mais, en supposant que deux de ces points aient la même cote, leur jonction sera une section parallèle du plan à laquelle une seule cote suffira, tellement que ce plan sera défini par une trace et deux cotes. Et, si l'on prononce que deux points appartiennent à la ligne de plus grande pente du plan relativement au repère, la position de cette seule ligne fera conclure celle du plan considéré.

24. Trois points  $a, b, c$ , non en ligne droite (fig. 4), conduisent facilement aux sections parallèles, ainsi qu'à la ligne de plus grande pente de leur plan. Car, en choisissant sur la droite  $ab$ , qui unit les points de plus grande et de plus petite cotes, le point  $d$  coté  $c' = 3$ , la ligne  $cd$  représentera une parallèle au plan de projection ; et toute parallèle  $kx$  à cette droite sera une section parallèle du plan, dont la cote  $k'$  appartiendra à  $bx$ , tandis que la perpendiculaire  $bo$ , menée par le point  $b$  le plus éloigné de  $cd$ , sera la projection de la ligne

de plus grande pente qui aura pour cotes déterminantes  $b'=7$  et  $f'=c'=3$ .

Un plan parallèle au repère sera indiqué par un seul point coté. Un plan perpendiculaire au repère sera défini par une droite sans cotes.

25. Des plans parallèles ont leurs lignes de plus grande pente parallèles. Mener par un point un plan parallèle à un autre, revient donc à tracer par ce point une droite parallèle à la ligne de plus grande pente donnée, § 18.

26. Toute droite  $kx$  (fig. 4), parallèle à la section parallèle  $cd$ , ou perpendiculaire à la projection  $bo$  de la ligne de plus grande pente d'un plan, sera la projection d'une parallèle au repère, laquelle aura pour coté celle du point  $k$  déterminée sur  $ba$ , ou du point  $v$  de  $bo$ .

Étant connue la projection  $x$  d'un point du plan donné  $bo$ , trouver la cote de ce point.

La section parallèle qui passe par ce point, dans le plan, aura pour projection  $xk$  et pour cote  $v'$  estimée sur  $bo$ , ou  $k'$  estimée sur  $ba$ ; cette cote appartiendra donc à  $x$ .

Un autre point  $y$  du même plan aura pour cote  $y'$ , et la droite de ce plan, projetée en  $yx$ , se trouvera alors déterminée.

27. Si l'on divise la projection de plus grande pente  $bo$  (fig. 4) en parties  $\frac{bo}{b'}$ , ou  $to$ , correspondant à l'unité de cote, § 15, on obtiendra, par de simples coups d'équerre, les cotes de points  $x, y, a, \dots$  d'un plan. Cette destination de la ligne de plus grande pente la rend ÉCHELLE DE COTES de tous les points du plan qu'elle représente.

28. Pour trouver l'intersection de deux plans  $oA, o'b$  (fig. 6) : par des points  $A$  et  $a'$  de même cote sur ces plans, on tracera les sections parallèles  $Aa'', a'a''$ , se coupant en un point  $a''$  de l'intersection qui passera, d'ailleurs, par la rencontre  $o''$  des traces  $o o'', o' o''$  des plans donnés.

Dans le cas particulier où les lignes de plus grande pente auront leurs projections parallèles : les plans correspondants

se couperont suivant une parallèle au plan de repère; et, pour obtenir cette intersection, on cherchera sur  $o'b$  (*fig. 2* et *3*) le point  $b$  coté  $\Lambda$ , on tracera  $\Lambda b$ ,  $o'o'$ , puis on conduira, par le point de concours  $t$ ,  $c'c$  perpendiculaire aux parallèles  $o\Lambda$ ,  $o'b$ . Cette droite sera la projection d'une section parallèle cotée  $c$  dans le plan  $o'b$ , et d'une autre section parallèle cotée  $c'$  dans le plan  $o\Lambda$ ; or les cotes  $c$  et  $c'$  sont égales, à cause de  $\frac{o'c}{o'b} = \frac{oc'}{o\Lambda}$ , donc  $cc'$  est l'intersection demandée.

On pourra, aussi, employer un plan auxiliaire coupant ceux donnés suivant des droites, dont le point de concours appartiendra à la parallèle cherchée.

Enfin, si les lignes de plus grande pente étaient projetées sur la même direction (*fig. 2*), on déplacerait l'une d'elles pour retomber dans le cas précédent; à moins qu'on ne voulût chercher le point de rencontre de ces droites par le procédé du § 17, page 7.

29. On aura le point où une droite  $bo'$  perce le plan  $\Lambda o$  (*fig. 6*): en considérant cette droite comme ligne de plus grande pente d'un plan, dont on déterminera l'intersection  $o''a''$  avec le plan donné; cette intersection coupera la droite  $bo'$  au point voulu  $t$ .

D'où résulte un nouveau moyen de construire le point de rencontre de deux droites  $ao$ ,  $o'b$ , qui ont le même plan projetant (*fig. 2* et *3*): on regardera, en effet, chacune d'elles comme ligne de plus grande pente d'un plan particulier, et l'intersection  $tc$  de ces plans, obtenue en déplaçant la ligne de plus grande pente de l'un d'eux, fournira le point cherché  $c$ .

30. Mener un plan perpendiculaire à la droite  $ao$ , par un point  $b$  pris sur cette droite (*fig. 7*), ou  $b'$  extérieur à ladite droite (*fig. 8*).

La ligne de plus grande pente, imaginée par le point donné, se projettera sur  $ao$  (*fig. 7*), et selon  $b'o'$  parallèle à  $ao$  (*fig. 8*); et, pour trouver la trace de cette ligne, supposons le point  $b$  projeté sur le plan projetant de  $ao$  et le tout ra-

battu sur le plan de repère; supposons aussi, par  $B$ , la perpendiculaire  $Bc$  sur  $Ao$ , le point  $c$  en sera la trace, et l'on déterminera  $cb$ , dans les deux figures, par  $\frac{cb}{\lambda a} = \frac{bb}{ao}$ ;  $\lambda a$  et  $bb$ , étant les longueurs des cotes de  $A$  et  $B$ , devront être, ainsi que  $ao$ , exprimées en fonction de l'unité de cote  $h$ .

La perpendiculaire, abaissée d'un point  $b'$  sur la droite  $ao$  (fig. 8), joindra ce point à la trace de la droite sur le plan qui vient de lui être perpendiculairement mené.

31. Conduire une perpendiculaire au plan  $ao$ , par un point  $b$  donné sur ce plan (fig. 7), ou  $b'$  extérieur audit plan (fig. 8).

La projection de cette droite sera parallèle à  $ao$ . Pour en avoir la trace: imaginons, comme précédemment, le point  $b$  projeté sur le plan projetant de la ligne de plus grande pente, et le tout rabattu; la perpendiculaire cherchée viendra en  $bc$ , et la distance  $cb$  sera donnée par la relation  $cb = \frac{\lambda a \times bb}{ao}$ . Les longueurs  $cb$ ,  $ao$ ,  $\lambda a$  et  $bb$  étant, comme ci-dessus, exprimées en fonction de l'unité de cote  $h$ .

32. Une ligne courbe sera représentée par sa projection convenablement cotée.

Si cette ligne est plane, les cotes de trois de ses points, non en ligne droite, suffiront pour conclure toutes les autres: car les trois cotes données serviront à déterminer le plan de la courbe et son échelle de cotes, § 27, qui répondra à tous les points de cette courbe.

33. Nous avons dit, § 11, qu'une surface était géométriquement définie par son plan, accompagné des cotes de distance de ses points principaux au plan de projection.

On diminuera le nombre des cotes, en unissant tous les points pareillement cotés; et alors, les surfaces seront décrites au moyen d'un système de sections parallèles au plan de repère, qui, étant égales à leurs projections, n'exigeront qu'une seule cote de distance pour chacune d'elles.

34. On parviendra au même genre de description: si, pour

définir géométriquement les surfaces qui terminent les corps, on considère ceux-ci comme des polyèdres, à faces planes d'autant moins grandes que les surfaces extérieures de ces corps auront plus de courbure, en sorte que chaque polyèdre sera représenté par l'ensemble de ses facettes. Mais, on conclut la grandeur et la position d'une figure plane, au moyen de sa projection et de la position du plan indéfini qui la contient ; on a vu d'ailleurs, § 23, qu'un plan était représenté de la manière la plus simple par sa ligne de la plus grande pente, c'est-à-dire, par la projection de cette ligne avec deux cotes. Donc, on pourra décrire une surface par un ensemble de figures, dans lesquelles seront tracées les projections d'éléments de lignes de plus grande pente accompagnées de cotes de distance ; et, comme on réduira la quantité de ces cotes, au moyen de sections parallèles qui, elles-mêmes, font conclure les projections des lignes de plus grande pente, § 22, il s'en suit que l'introduction des sections parallèles dispensera des lignes de plus grande pente et d'une majeure partie des cotes : ce qui fera adopter, comme le plus simple, le mode de description des surfaces par leurs sections parallèles.

35. On diminuera les données descriptives d'une surface : en n'en conservant que les cotes successivement équidifférentes, remplacées avec avantage par des lignes qui seront les projections de sections parallèles consécutivement équidistantes. On conclura alors les cotes de ces sections : en connaissant la cote de l'une d'elles et l'*équidifférence* ; ou bien : avec les cotes de deux sections quelconques, qui serviront, d'abord, à déterminer l'*équidistance* des sections consécutives.

On nomme *SECTIONS PRINCIPALES* d'une surface, ces sections parallèles, dont les cotes, consécutivement équidifférentes, se déduisent les unes des autres. Toute autre section parallèle de la surface devra être accompagnée de sa cote de distance au plan de projection :

36. Lorsque, pour définir une surface, on se bornera à en

tracer les sections principales; il faudra adopter une équidistance telle que les éléments de plans tangents à une zone, limitée par deux sections consécutives, se confondent sensiblement avec cette zone, dans le sens de plus grande pente; ensorte que l'équidistance devra être alors d'autant moindre que l'échelle de description sera plus grande. Ce qui s'exprimera généralement par  $\frac{n}{m^x} = \lambda$ ,  $n$  étant l'équidistance,  $\frac{1}{m}$  l'échelle,  $\lambda$  une *constante*, et l'exposant  $x$  restant positif et entier: pour que  $n$  devienne nulle ou infinie en même temps que  $m$ , et que, à une valeur de  $m$ , corresponde une seule valeur de  $n$ .

37. Pour trouver sur une surface, décrite par ses sections principales, la cote d'un point projeté: je suppose la projection donnée  $a$  (fig. 9) située entre les deux sections principales  $gu, sq$  cotées  $g'$  et  $s'$ ; je conduis par le point  $a$  une droite  $gs$ , à-peu-près perpendiculaire à celle des sections dont il est le plus éloigné: cette ligne, qui sera peu différente de la projection de plus grande pente, pourra être considérée comme projection d'une droite  $gs$  contenue sur la zone  $gsqu$ , en sorte que  $a$  correspondra au point  $\lambda$  de cette droite, et que sa cote  $a'$  sera déterminée par  $\frac{\lambda r}{gl} = \frac{as}{gs}$ , ou  $(a' - s') = \frac{as}{gs} (g' - s')$ . § 14, et, en représentant par  $n$  l'équidistance  $(g' - s')$ , on aura  $a' = s' + n \frac{as}{gs}$ ; c'est-à-dire que: pour avoir la cote du point correspondant à  $a$ , il faudra ajouter la fraction  $\frac{as}{gs}$  de l'équidistance  $n$  à la moindre des cotes principales voisines.

38. Un autre point  $b$ , compris aussi dans la zone principale  $ugsq$  (fig. 9), aura, de même, pour cote:  $b' = s' + n \frac{bq}{uq}$ ; en sorte que, si  $\frac{as}{gs} = \frac{bq}{uq}$ ,  $a'$  égalera  $b'$ : c'est-à-dire, que les points  $a$  et  $b$  auront la même cote. Ainsi, tous les points

divisant proportionnellement les intervalles compris par les projections de deux sections principales consécutives, pourront être regardés comme appartenant à la projection d'une section parallèle intermédiaire, cotée en raison du rapport observé.

Conséquemment, on obtiendra la projection d'une section parallèle cotée  $a'$ : en cherchant, d'abord, les cotes principales consécutives  $g'$ ,  $s'$  qui comprennent  $a'$  (fig. 9), pour partager ensuite, selon le rapport  $\frac{H}{(a' - s')}$ , chacun des espaces  $gs$ ,  $df$ ,  $ug$ ... de la zone correspondante  $ugsq$ , et joindre les points de division  $a$ ,  $c$ ,  $b$ .

39. Pour mener, par un point  $c$  pris sur une surface (fig. 9), un plan tangent à cette surface: on tracera la section parallèle qui passe par ce point, en déterminant d'autres points,  $a$ ,  $b$ ,... tels que leurs distances aux projections principales  $gu$ ,  $sq$  aient un même rapport, et on conduira la normale  $df$  à cette section intermédiaire, laquelle normale sera la projection de la ligne de plus grande pente du plan tangent en  $c$ , ayant pour cotes, en  $d$  et  $f$ , celles des sections principales  $gu$ ,  $sq$ .

40. L'intersection de deux surfaces, décrites par leurs sections principales, s'obtiendra en les coupant par des plans parallèles au plan de projection, et en cherchant les points communs aux sections principales et intermédiaires de mêmes cotes.

Soient (fig. 10) deux surfaces  $A$  et  $B$ , dont les cotes principales se déduisent de la cote (50, 5) appartenant à la section ponctuée, qui termine la surface  $B$ .

Les deux surfaces se pénètrent, un peu au-dessous de la section principale cotée 46.

Si les rencontres des sections principales de mêmes cotes ne fournissent pas des points assez rapprochés de l'intersection des surfaces, on recourra aux sections intermédiaires; ainsi, la section parallèle  $aa'$  déterminée dans la surface  $A$ , à demi-distance des sections n.º 44 et 45, conformément

au § 38, coupera la section  $bb'$ , de même cote dans la surface  $B$ , en des points de la ligne cherchée; d'autres sections parallèles-milieu de  $A$  couperont aussi les sections intermédiaires de  $B$  suivant de nouveaux points; et, en multipliant ces sections auxiliaires de proche en proche, entre les cotes 45 et 46 des deux surfaces: on obtiendra des points successifs de l'intersection, jusqu'à ce qu'on arrive à des lignes intermédiaires de même cote  $cc'$ ,  $dd'$ , tangentes l'une à l'autre au point limité  $s$  de cette intersection, qui se projettera alors selon la courbe  $tsa$ , dont les points auront pour cotes celles des sections parallèles qui ont servi à les déterminer.

41. L'intersection d'une surface par un plan est un cas particulier de la question précédente. Les sections parallèles du plan seront des droites perpendiculaires à sa ligne de plus grande pente, et passant par les points de cette ligne convenablement cotés. Ces droites couperont les sections parallèles correspondantes de la surface, en des points de l'intersection proposée.

Soient (fig. 11)  $B$  la surface et  $FL$  la projection de la ligne de plus grande pente du plan coupant, déterminée par les cotes (45,5), (49,5). Je divise  $FL$  en 8 parties égales, pour avoir les points cotés (46), (46,5), (47), (47,5), (48), (48,5), (49) de sections principales et intermédiaires-milieu du plan  $FL$ , qui rencontreront les sections analogues de la surface  $B$  en des points de la ligne cherchée.

A un point extrême  $x$  de cette ligne, la section parallèle du plan coupant ( $49\frac{1}{2}$ ) est tangente à celle de même cote de la surface.

On obtiendra, évidemment, des points plus rapprochés: en multipliant davantage les sections intermédiaires, sur le plan et sur la surface.

Pour avoir la grandeur de cette intersection plane: on rabattra la ligne de plus grande pente sur le plan parallèle coté (45,5), en la rendant hypoténuse d'un triangle rectangle qui a pour côtés: la projection  $FL$  et la longueur  $Ll$  de la cote graphique  $(49,5 - 45,5) = 4$ ; puis on considérera  $Fl$  comme



charnière du plan donné, qu'on couchera sur la parallèle (45,5). Les sections parallèles dudit plan se placeront perpendiculairement à  $rl$ , et deviendront les ordonnées de l'intersection rabattue.

Enfin, pour tracer la tangente au point  $q$  de l'intersection: on mènera, en ce point, le plan tangent à la surface  $\Sigma$ , en construisant la section parallèle passant par  $q$ , et élevant, sur cette section, la normale  $ef$  qui sera la projection de plus grande pente du plan tangent, ayant pour cotes déterminantes  $e' = (46)$ ,  $f' = (47)$ , § 39; et, au moyen de  $fp = 2fe$ , le point  $p$  coté (49) donnera la section  $ph$  de même cote sur le plan tangent, laquelle rencontrera la section parallèle (49) du plan coupant en un point  $h$  de la tangente cherchée, dont  $qh$  sera la projection.

Les points  $q$  et  $h$  étant rabattus en  $Q$  et  $H$ , qui sera la tangente à l'intersection rabattue.

42. L'intersection d'une surface, par un plan  $rk$  perpendiculaire au plan de projection (*fig. 10*), ou le *profil* qui dresse graphiquement les cotes de la surface dans ce plan, § 11 page 6, se décrit d'une manière encore plus simple.

Ce profil a pour projection la trace  $rk$  du plan coupant, ses points cotés sont ceux où ladite trace rencontre les projections des sections parallèles.

Tout point d'un profil, *maximum* ou *minimum* par rapport au plan de projection, ayant sa tangente parallèle audit plan, est le contact d'une section parallèle tangente à la trace du profil; en sorte que chacun des points, où cette trace sera tangente à la projection d'une section parallèle, correspondra à un point *limite*, *maximum* ou *minimum*.

Ainsi, la section  $vv'$ , déterminée par tâtonnement, tangente en  $v$  à la trace  $rk$ , donne la cote de ce point limite.

Le profil se figure dans le rabattement du plan coupant, de la manière suivante (*fig. 10 et 12*): la trace  $rk$  est portée en  $r''k''$ , aux extrémités de laquelle on élève des perpendiculaires recevant les cotes graphiques (44), (45), (46), qui servent à tracer les sections parallèles du plan coupant.

Un point quelconque, celui qui se projette en  $q$  par exemple (fig. 10), se rabattra sur la perpendiculaire  $q''Q$  (fig. 12), telle que  $q''r'' = qr$ , et devra, d'ailleurs, être sur la parallèle (46, 5), il viendra donc en  $Q$ , qu'on aurait obtenu en faisant immédiatement  $Qa = qr$ . Tout autre point  $x$  du profil se trouvera, en portant la distance  $kx$  sur la parallèle de même cote que lui.

Pour marquer le point limite  $v$  : on tracera des sections intermédiaires aux courbes (47) et (48) (fig. 10), au moyen des subdivisions successives de leur intervalle, jusqu'à ce qu'on arrive à la ligne  $vv'$  tangente à  $rk$ , en  $u$ . On portera  $r''u'' = ru$  (fig. 12), et l'on fera  $u''v$  égale à la cote graphique de la section parallèle  $vv'$ .

43. On aura les points de rencontre d'une droite avec une surface : en regardant cette droite  $re$  (fig. 10), déterminée par les cotes (45, 5), (50, 3), comme celle de plus grande pente d'un plan qui coupera la surface  $s$  suivant une ligne dont on construira, seulement, les éléments voisins des points cherchés ; et chaque élément  $yy'$  sera facile à reconnaître, par la comparaison des cotes principales de la droite  $re$  à celles de la surface  $s$ .

44. Pour définir graphiquement la surface cylindrique, enveloppant une surface donnée et ayant ses génératrices parallèles à une droite connue : on construira les sections de cette surface par des plans parallèles à la droite ; et les tangentes tracées à chacune d'elles, parallèlement à cette droite, seront des génératrices de la surface cylindrique. Il est, quelquefois, avantageux de choisir les plans coupants perpendiculaires au plan de repère.

S'il s'agit de déterminer la surface conique, enveloppant une surface donnée et ayant son sommet en un point connu : on construira des sections de la surface, et particulièrement des profils, suivant des plans passant par ce point ; et les tangentes, conduites dudit point à chacune des sections, seront autant de génératrices de la surface-enveloppe.

45. Pour mener, par une droite, un plan tangent à une

surface : on enveloppera celle-ci d'une surface cylindrique parallèle à la droite ; et le plan tangent, conduit par cette droite à la surface-enveloppe, satisfera à la question.

On pourra, aussi, envelopper la surface donnée par deux surfaces coniques ayant leurs sommets sur la droite ; et tout point commun aux lignes, suivant lesquelles ces enveloppes toucheront la surface donnée, sera celui de tangence du plan cherché.

Mais, on parviendra plus promptement à la solution de ce problème, par les considérations suivantes.

46. On peut limiter la facette de tangence d'un plan avec une surface, par les éléments de deux sections parallèles *rs*, *pq* (fig. 5) qui, prolongés, deviendront des sections parallèles du plan tangent.

En imaginant, par la trace d'une droite sur le plan de chaque section parallèle d'une surface, une tangente à cette section ; les projections de ces tangentes pourront être : ou parallèles ; ou convergentes de proche-en-proche, soit de part et d'autre de la droite donnée ; soit du même côté de cette droite.

Si les projections des tangentes sont parallèles, les tangentes le seront aussi ; et, s'appuyant toutes sur la même droite, elles constitueront un plan tangent à la surface, suivant la ligne de plus grande pente droite qui joindra les points de contact obtenus sur les diverses sections parallèles.

Lorsque les projections des tangentes convergeront de proche-en-proche, avec un changement de sens dans leurs convergences : on les multipliera assez, dans l'intervalle de ce changement, pour trouver les deux tangentes voisines dont la convergence sera nulle, comme servant de passage aux deux sens opposés du concours ; et la zone, limitée par les tangentes parallèles, appartiendra évidemment au plan tangent. Dans la pratique : la tangente principale, qui rencontrera ses deux voisines de part et d'autre de la droite, sera regardée comme déterminant le plan tangent. Elle fera alors, avec la droite donnée, un angle *minimum* ou *maximum*.

parmi ceux que les projections tangentes voisines forment, dans un même sens, avec cette droite.

Enfin, dans le cas où les projections tangentes non parallèles convergeront du même côté de la droite : cette dernière ne pourra faire partie d'un plan tangent à la surface.

47. Cela posé, pour mener un plan tangent à la surface  $\pi$  (fig. 11), par la droite  $FL$  ayant (45,5) et (49,5) pour cotes déterminantes : j'intercalerai, sur cette droite, les cotes (46), (47); (48) et (49) de ses traces sur les plans principaux de  $\pi$ , et je dirigerai, par ces traces, des tangentes aux sections correspondantes de la surface (vue par une seule espèce de courbure, celle convexe par exemple), en me bornant à marquer les tangentes (49), (48), (47) qui, convergeant de part et d'autre de  $FL$ , comprennent l'élément de contact du plan cherché.

Puisque l'équidistance de description est tellement subordonnée à l'échelle, que les zones principales se composent de facettes planes, § 36 page 14; on pourra, sans inconvénient, déterminer le plan tangent par la parallèle (48), dont la projection coupe les tangentes voisines (47) et (49) de part et d'autre de  $FL$ . Mais, on agira encore mieux : en traçant la tangente (47,5) qui, étant sensiblement parallèle à l'une ou à l'autre des tangentes (47) et (48), précisera davantage le plan tangent conduit par  $FL$ .

48. Si la droite, par laquelle on doit faire passer le plan tangent à la surface  $\pi$  (fig. 10), est perpendiculaire au plan de projection : on n'en verra que la trace  $b$ ; et, le plan tangent étant, aussi, perpendiculaire au repère, son élément de contact sera compris par les tangentes parallèles (46) et (47), dont les projections se confondent en  $bh$ .

49. Quand la droite donnée  $rk$  (fig. 10) sera parallèle au repère, avec la cote (48): on recourra à la surface cylindrique-enveloppe, qui aura ses génératrices parallèles à  $rk$  se projetant tangentielllement aux sections parallèles de la surface  $\pi$  pour former la ligne de contact  $\pi u g' n x o$ . On construira, ensuite, la trace de cette surface cylindrique sur un

plan auxiliaire  $zh$ , choisi avec avantage perpendiculaire au repère § 44; et, il ne s'agira plus que de conduire, par la trace  $Q$  de la droite donnée sur ce plan auxiliaire (fig. 13), une tangente  $Qg$  au profil cylindrique  $z''gh''$ , pour connaître le point de contact cherché  $g'$  (fig. 10), par  $zg = z''g''$  et  $gg'$  perpendiculaire à  $zh$ .

50. Le plan n'est pas la seule surface qui serve de repère pour définir géométriquement les corps; une surface de forme quelconque peut, aussi, être employée dans le même but.

Imaginons, en effet, que l'on ait projeté orthogonalement tous les sommets polyédriques d'un corps, sur la surface de repère, au moyen de normales conduites de ces sommets sur ladite surface: chaque sommet sera connu de position, par sa projection sur la surface de repère, accompagnée de la cote exprimant la distance de ce point à ladite surface; et, par conséquent, le corps considéré sera géométriquement défini: en accompagnant de cotes sa projection sur la surface de repère.

Il paraîtra, alors, nécessaire de construire l'épure descriptive d'un corps, sur une surface semblable à celle qui a été prise pour repère. Mais, comme on peut décomposer ce repère en facettes contenues sur ses divers plans tangents; on ramènera toujours la description graphique d'un corps à des épures planes: en rapportant les points de ce corps à des plans tangents à la surface de repère; pourvu qu'on spécialise, sur chaque description, le plan tangent ou l'élément de la surface de repère, sur lequel on a établi la projection partielle, § 341, Livre III.

## CHAPITRE II. : TRIGONOMETRIE.

*Principes fondamentaux.*

51. Les valeurs numériques, ou graduations des angles, seront toutes positives: si on admet qu'une droite puisse s'incliner sur une autre, dans un sens déterminé, de zéro à quatre droits.

Le premier côté d'un angle est celui à partir duquel on désigne le sens de cet angle, dont on suppose le sommet occupé par l'observateur.

Comme on peut augmenter ou diminuer de quatre droits l'inclinaison réciproque de deux lignes, sans déranger leurs positions: la différence de deux amplitudes angulaires sera toujours rendue positive, en ajoutant, au besoin, quatre angles droits à l'une d'elles.

D'où il suit que l'angle de deux droites, dans un sens désigné, pourra s'estimer par la différence des inclinaisons, dans ce même sens, des droites données sur une ligne quelconque.

En effet, quand les droites  $AB$ ,  $AB'$  (*fig. 14*), seront situées du même côté de la ligne de repère  $AO$ , on aura évidemment: angle  $BAB' = \text{incl. } OB' - \text{incl. } OB$ . Et, dans le cas où les côtés de l'angle à estimer  $BAB$ , seront de part et d'autre du repère  $AO$ , on aura :

$$\begin{aligned} \text{Angle } BAB &= \text{ang. } BAO + \text{angl. } OAB \\ \text{mais : } \left\{ \begin{array}{l} \text{Angle } BAQ = \text{incl. } OB \\ \text{Angle } OAB = 4^d - \text{incl. } OBO'b \end{array} \right. \\ \text{donc : } \end{aligned}$$

$$\text{Ang. } BAB = 4^d + \text{incl. } OB - \text{incl. } OBO'b = \text{incl. } OB - \text{incl. } OBO'b.$$

52. Les angles d'un triangle rectiligne sont déterminés par les rapports, directs ou inverses, d'un côté de ce triangle aux deux autres; car tous les triangles, construits au moyen de ces rapports, sont semblables (*fig. 15*).

On tracerait donc, avec le compas seul, un angle  $A$ : en le faisant appartenir à un triangle  $ABC$ , dont on pourrait con-

naitre l'un des douze couples de rapports fournis par ses côtés; savoir :

$$\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right), \left(\frac{a}{c}, \frac{c}{b}\right), \left(\frac{b}{c}, \frac{a}{b}\right), \left(\frac{b}{c}, \frac{b}{a}\right), \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{a}\right), \left(\frac{a}{b}, \frac{a}{c}\right), \\ \left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}\right), \left(\frac{b}{a}, \frac{a}{c}\right), \left(\frac{c}{b}, \frac{a}{b}\right), \left(\frac{c}{b}, \frac{b}{a}\right), \left(\frac{c}{a}, \frac{b}{c}\right), \left(\frac{c}{a}, \frac{c}{b}\right).$$

Mais, en considérant qu'un angle obtus  $BAC$  se conclut facilement de l'angle aigu  $BAX$  qui lui est adjacent : la construction de toute espèce d'angles se ramènera à celle d'un angle aigu, pouvant toujours faire partie d'un triangle rectangle  $BAC$  (fig. 16), dont on sait obtenir la forme au moyen d'un seul des six rapports, directs ou inverses, de ses côtés deux-à-deux, savoir :

$$\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, \frac{a}{b}, \frac{b}{a}, \frac{c}{b}, \frac{c}{a}.$$

Ces rapports indiquant, pour chaque angle, la construction du triangle rectangle qui le contient, sont les *indices trigonométriques* dudit angle, que l'on distingue entre eux par les noms suivants : le triangle  $ABC$  étant rectangle en  $c$  (fig. 16),

$\frac{a}{c}$  est le *sinus* de  $A$ , . . . . . représenté par :  $\sin A$

$\frac{b}{c}$  sinus du complément de  $A$ , ou *cosinus* de  $A$ . . . . .  $\cos A$

$\frac{a}{b}$  est la *tangente* de  $A$ . . . . .  $\operatorname{tg} A$

$\frac{b}{a}$  tangente du complément de  $A$ , ou *cotangente* de  $A$ . . .  $\cot A$

$\frac{c}{b}$  est la *sécante* de  $A$ . . . . .  $\sec A$

$\frac{c}{a}$  sécante du complément de  $A$ , ou *cosécante* de  $A$ . .  $\operatorname{cosec} A$

et ces indices, dérivant les uns des autres, ont d'ailleurs entre eux les relations :

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1, \quad \operatorname{tg} A \cot A = 1, \quad \sec A \cos A = 1, \\ \operatorname{cosec} A \sin A = 1, \quad \operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A}.$$

La sécante et la cosécante, pouvant être facilement suppléées par le cosinus et le sinus, sont rarement employées.

53. Voyons, maintenant, comment chacun des indices trigonométriques pourra convenir à toutes les inclinaisons partant d'une droite  $ao$  dans un sens déterminé, de droite à gauche par exemple, depuis zéro jusqu'à quatre droits (*fig. 14*).

Soit,  $1.^{\circ} \sin A = n = \frac{a}{c}$ , d'où  $a = nc$ .

Du centre  $A$ , avec le rayon arbitraire  $c$ , je décris une circonférence que je coupe, à une distance  $BC$ , ou  $a = nc$ , de  $ao$ , par la parallèle  $bb'$  : les triangles rectangles  $ABC$ ,  $AB'C'$  résultent; l'un et l'autre, de l'indice  $\frac{a}{c} = n$ ; en sorte que les deux inclinaisons  $ob$ , ou  $A$ , et  $obb'$ , ou  $(2^d - A)$ , répondent au même sinus.

En imaginant la parallèle  $bb'$  telle que  $bc = a = nc$ , elle coupera aussi la circonférence, de manière à donner le même sinus  $n$  aux angles  $bAC$ ,  $b'AC'$  construits dans le sens inverse des précédents; les inclinaisons  $obo'b'$ , ou  $(2^d + A)$ , et  $obo'b'b$ , ou  $(4^d - A)$ , résulteront donc de la même valeur  $n$ , donnée à  $\sin A$  et prise négativement, ainsi :

$\sin A = +n$  fournira . . .  $A$  et  $(2^d - A)$   
et  $\sin A = -n$   $(4^d - A)$  et  $(2^d + A)$

ou enfin : le sinus d'un angle est le même que celui de son supplément à deux droits, et de signe contraire à celui de son supplément à quatre droits.

$2.^{\circ} \cos A = p = \frac{b}{c}$ , d'où  $b = pc$ .

La circonférence  $obo'b$  étant coupée par la perpendiculaire  $bb$ , à une distance du centre égale à  $AC$  ou  $b = pc$ ; les triangles rectangles  $ABC$ ,  $Abc$  résulteront, l'un et l'autre, de l'indice  $\frac{b}{c} = p$ ; en sorte que les deux inclinaisons  $ob$ , ou  $A$ , et  $obo'b$ , ou  $(4^d - A)$ , répondent au même cosinus.

De même, la perpendiculaire  $b'b'$ , telle que  $ac'$  ou  $b = pc$ , fournira les deux triangles  $B'AC'$ ,  $b'AC'$ , d'où résulteront les



deux inclinaisons  $ob'a$ , ou  $(2^d - A)$ , et  $ob'o'b'$ , ou  $(2^d + A)$ , ayant pour cosinus commun la valeur  $p$  prise négativement.

Ainsi :  $\cos A = +p$  correspondra à . . . .  $A$  et  $(4^d - A)$   
 $\cos A = -p$  . . . .  $(2^d - A)$  et  $(2^d + A)$

c'est-à-dire que : le cosinus d'un angle est le même que celui de son supplément à  $4^d$ , et de signe contraire à celui de son supplément à  $2^d$ .

$$3.^o \quad \operatorname{tg} A = +t = \frac{+\sin A}{+\cos A} = \frac{-\sin A}{-\cos A} \text{ corresp. à } A \text{ et } (2^d + A)$$

$$\operatorname{tg} A = -t = \frac{+\sin A}{-\cos A} = \frac{-\sin A}{+\cos A} \text{ . . . } (2^d - A) \text{ et } (4^d - A)$$

$$4.^o \quad \left. \begin{aligned} \cot A = +q &= \frac{+\cos A}{+\sin A} = \frac{-\cos A}{-\sin A} \\ \cot A = -q &= \frac{-\cos A}{+\sin A} = \frac{+\cos A}{-\sin A} \end{aligned} \right\} \text{ comme la tangente}$$

ou : la tangente et la cotangente d'un angle sont de signes contraires aux tangente et cotangente de son supplément à deux ou à quatre droits.

$$5.^o \quad \sec A = \frac{1}{\pm \cos A} \text{ varie comme le cosinus.}$$

$$6.^o \quad \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\pm \sin A} \text{ varie comme le sinus.}$$

Ainsi donc, toute inclinaison, comprise de zéro à quatre droits, aura pour indice trigonométrique celui d'un angle moindre qu'un droit : pourvu que le signe de cet indice détermine le sens de la construction du triangle rectangle dont il dérive.

54. Le rayon d'une circonférence est le développement de l'arc d'environ  $64$  grades, attendu que  $2\pi R = 400^r$ ,  $\pi = \frac{22}{7}$ ,  $R = 63^r, 64$ ; d'où :  $\frac{\operatorname{arc} 1^r}{R} = \frac{1}{64}$ ,  $\frac{\operatorname{arc} 1^r}{R} = \frac{1}{6364}$  ou  $\frac{1}{6400}$ .

Les sinus et cosinus de la somme et de la différence de deux angles  $x$ ,  $y$  sont donnés par :

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin y \sin x$$

d'où l'on tire :

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \sin \frac{x}{2} - 4 \sin \frac{x}{2} \sin^2 \frac{x}{4}$$

$$\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

$x$  représentant l'arc du rayon  $R$  qui mesure l'angle  $x$ ; on a :

$$\frac{x}{R} - \sin x < \frac{1}{2} \left( \frac{x}{R} \right)^3, \text{ tiré de } x < R \operatorname{tg} x, \frac{x}{R} < \frac{\sin x}{1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}},$$

$$\frac{x}{R} - \sin x < 2 \frac{x}{R} \sin^2 \frac{x}{2}, \text{ et, à plus forte raison :}$$

$$\frac{x}{R} - \sin x < 2 \frac{x}{R} \left( \frac{x}{2R} \right)^2 \text{ Ex: } \frac{\operatorname{arc} 1'}{R} - \sin 1' < 0,000000000002.$$

$c$ , étant la sous-tendante de l'arc  $x$ , est égale à  $2R \sin \frac{x}{2}$ ;

$$\text{d'où: } x - c = 2R \left( \frac{x}{2R} - \sin \frac{x}{2} \right) \text{ et } \frac{x - c}{R} < \left( \frac{x}{2R} \right)^3$$

Exemple : arc  $1''$  — corde  $< \frac{R}{2000000}$ .

$$(L) \quad \begin{cases} \sin x \sin y = \sin^2 \left( \frac{x+y}{2} \right) - \sin^2 \left( \frac{x-y}{2} \right) \\ 1 - \cos x \cos y = \sin^2 \left( \frac{x+y}{2} \right) + \sin^2 \left( \frac{x-y}{2} \right) \end{cases}$$

$$(N) \quad \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \\ \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \cot \frac{x}{2} \end{cases}$$

$$(P) \quad \frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{\operatorname{tg} \left( \frac{x+y}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left( \frac{x-y}{2} \right)}$$

$$(Q) \quad \frac{1}{\operatorname{tg}(x \pm y)} = \left( \frac{1}{\operatorname{tg} x} \mp \operatorname{tg} y \right) \left[ 1 \mp \frac{\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x} + \frac{\operatorname{tg}^2 y}{\operatorname{tg}^2 x} \mp \frac{\operatorname{tg}^3 y}{\operatorname{tg}^3 x} + \dots \right]$$

55. On a calculé des tables destinées à évaluer les amplitudes des angles au moyen des logarithmes de leurs indices trigonométriques, et réciproquement. Les caractéristiques

des logarithmes sinus et cosinus ont été augmentées de 10, pour les rendre positives ; et l'on s'est dispensé d'écrire les logarithmes des sécantes et cosécantes, qui sont les compléments à 10 des logarithmes cosinus et sinus.

L'angle, qui commence les tables trigonométriques, est celui dont le sinus, ou la tangente, diffère du rapport de son arc au rayon, d'une unité de la dernière décimale de ces tables ; il dépend donc du nombre de chiffres donné par les tables. Les sinus et tangentes d'angles inférieurs à cette origine sont, alors, sensiblement proportionnels aux graduations desdits angles, et calculés comme rapports des arcs au rayon.

La limite inférieure des tables trigonométriques se déduit de la relation  $\frac{x}{R} - \sin x < \frac{1}{2} \left( \frac{x}{R} \right)^3$ . Ainsi, de ce que  $\frac{\text{arc } 1'}{R} - \sin 1' < 0,00000000002$ , § 54, il s'en suit que la table commençant par *un centigrade*, contiendra onze décimales. Et, quand cinq décimales devront suffire aux tables trigonométriques, elles auront *un grade* pour origine ; car :  $\frac{\text{arc } 1^g}{R} - \sin 1^g < 0,000002$ .

56. Les formules, qui lient entre eux les angles  $A, B, C$  et les côtés  $a, b, c$  d'un triangle rectiligne, sont :

$$b \sin C = c \sin B \quad a = b \cos C + c \cos B.$$

d'où résultent :  $a^2 + b^2 - 2ab \cos C = c^2$

$$2 \cos C = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - \frac{c}{a} \cdot \frac{c}{b} \dots\dots \frac{c^2}{a^2} = 1 + \frac{b^2}{a^2} - 2 \frac{b}{a} \cos C$$

$$\sin C = 2 \sqrt{\frac{\frac{p}{2} \left( \frac{p}{2} - a \right) \left( \frac{p}{2} - b \right) \left( \frac{p}{2} - c \right)}{ab}} = \frac{2 \text{ surf. } \triangle ABC}{ab}$$

$p$  égalant  $(a + b + c)$ .

$$\sin^2 \frac{C}{2} = \frac{\left( \frac{p}{2} - a \right) \left( \frac{p}{2} - b \right)}{ab}, \quad \cos^2 \frac{C}{2} = \frac{\frac{p}{2} \left( \frac{p}{2} - c \right)}{ab}$$

$$\frac{\operatorname{tg} \left( \frac{A-B}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left( \frac{A+B}{2} \right)} = \frac{\frac{a}{b} - 1}{\frac{a}{b} + 1} = \operatorname{tg} \left( \frac{A-B}{2} \right) \operatorname{tg} \frac{C}{2}.$$

57. Trouver la différence des angles au sommet, de deux triangles à base commune et situés sur le même plan.

Soit  $GD$  la base des triangles  $GCD$  et  $GSD$  (fig. 17), les angles  $C$  et  $S$  ont pour différence celle des angles  $CDS$  et  $CGS$ , car  $gpc + cgs + gcd = dps + cds + gsd$ ;

ainsi,  $G + C = D + S$  et  $C - S = D - G$ .

Or, le triangle  $CDS$  fournit :  $\sin D = \frac{CS}{CD} \sin CSD$

le triangle  $CGS$  donne :  $\sin G = \frac{CS}{CG} \sin GSC$

on obtiendra donc les éléments de  $\sin (C - S)$

par :  $\sin (D - G) = \sin D \cos G - \sin G \cos D$

transformable en :

$$\sin (D - G) = \sin D \left( 1 - 2 \sin^2 \frac{G}{2} \right) - \sin G \left( 1 - 2 \sin^2 \frac{D}{2} \right)$$

$$\text{et : } \sin (D - G) = \sin D - \sin G + 4 \sin \frac{D}{2} \sin \frac{G}{2} \sin \left( \frac{D - G}{2} \right)$$

58. Lorsque la distance des sommets  $s$  et  $c$  sera très-petite par rapport aux côtés des triangles considérés : les angles  $D$  et  $G$  seront très-petits, leur différence  $(D - G)$  ou  $(C - S)$  sera aussi très-petite, et l'on pourra négliger le terme  $4 \sin \frac{D}{2} \sin \frac{G}{2} \sin \left( \frac{D - G}{2} \right)$  de la dernière transformation de  $\sin (D - G)$ , laquelle se réduira alors à  $(\sin D - \sin G)$ . En sorte que, dans ce cas particulier,  $\sin (D - G)$  égalera sensiblement  $\left( \frac{CS}{CD} \sin CSD - \frac{CS}{CG} \sin GSC \right)$ ; et si, à cause de la peti-

tesse de  $(D - G)$ , on remplace  $\sin (D - G)$  par  $\frac{\text{arc}(D - G)}{R}$  il vien-

$$\text{dra : } \frac{\text{arc}(D - G)}{R} = \frac{\text{arc}(C - S)}{R} = \left( \frac{CS}{CD} \sin CSD - \frac{CS}{CG} \sin GSC \right)$$

$$\text{et } \text{arc}(C - S) = \left( \frac{CS}{CD} \sin CSD - \frac{CS}{CG} \sin GSC \right) R.$$

Pour connaître  $\text{arc}(C - S)$  en centigrades : on remplacera  $R$  par sa valeur en centigrades ou par  $\frac{1}{\sin 1'} = 6364$ , § 54,

ce qui donnera, en désignant  $cs$  par  $r$ ,  $cd=d$ ,  $cg=g$ , angle  $gsc$  par  $y$  :

$$\left(\frac{c-s}{1'}\right) = \frac{r}{d} \frac{\sin(s+y)}{\sin 1'} - \frac{r}{g} \frac{\sin y}{\sin 1'}.$$

On a recours à cette formule, pour réduire au centre les angles horizontaux qui doivent faire partie d'un canevas géodésique, § 320, Livre III.

59. Si l'angle  $s$  s'appuie sur le côté  $gc$ , en  $s$  ou  $\Sigma$  (fig. 18) : la différence  $(c-s)$ , devenue égale à  $d$ , se trouvera immédiatement par  $\sin d = \frac{sc}{cd} \sin dsg = \pm \frac{r}{d} \sin s$ , et, par approximation,  $\frac{d}{1'} = \frac{(c-s)}{1'} = \pm \frac{r \sin s}{d \sin 1'}$ . Résultat obtenu,

d'ailleurs : en remplaçant, dans la valeur précédente de  $(c-s)$ , l'angle  $y$  par zéro ou par deux droits, selon que  $c$  sera entre les points  $g$  et  $s$  ou sur le prolongement de  $g\Sigma$ .

Cette formule est employée à corriger une inclinaison zénithale, de son excentricité verticale par rapport au sommet de station, § 340, Livre III.

60. Déterminer la différence des angles au sommet, de deux triangles rectangles situés dans des plans différents et ayant un côté commun.

Soit  $cd$  le côté commun aux triangles rectangles  $gdc$ ,  $gds$  (fig. 19) : le triangle  $gdc$  pouvant être transporté dans le plan  $gds$  par  $dc' = dc$ , la question proposée rentrera dans la précédente ; en sorte qu'on aura :

$\sin(dsg - dc'g) = \sin scg' = \frac{c's}{c'g} \sin dsg$ , et, par approximation :

$\frac{s-c}{1'} = \frac{(cd - sd) \sin s}{cg \sin 1'}$ , qu'on eût tiré immédiatement de la formule générale, § 58, par  $s + y = 2$  droits,  $r = cd - sd$  et  $d = cg$ .

De ce que  $dcg + zcg = 1^d = dsg + zsg$ , on aura :

$\frac{(dsc - dcg)}{1'} = \frac{(zcg - zsg)}{1'} = \left(\frac{cd - sd}{cg}\right) \frac{\cos zsg}{\sin 1'}$ , qui sert à

corriger une inclinaison zénithale, de son excentricité horizontale, § 330, Livre III.

61. Les faces  $a, b, c$  et les angles dièdres  $A, B, C$  d'un angle solide trièdre sont liés par les relations suivantes :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

$$\text{d'où l'on déduit : } \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{\sin \left( \frac{a + (b - c)}{2} \right) \sin \left( \frac{a - (b - c)}{2} \right)}{\sin b \sin c}$$

$$\sin^2 \frac{a}{2} = \frac{-\cos \left( \frac{B + C + A}{2} \right) \cos \left( \frac{B + C - A}{2} \right)}{\sin b \sin c}$$

62. La projection d'un angle, sur un plan, se calcule au moyen des inclinaisons des côtés de cet angle sur le plan.

Soient (fig. 20),  $\text{csb}$  l'angle donné,  $c'sb'$  sa projection sur un plan ; la perpendiculaire  $sa$ , sur ce dernier, sera l'intersection des plans qui y projettent  $sb$  et  $sc$  ; soient inclin.  $csc' = i$  et inclinaison  $bsb' = 1$ .

La projection  $c'sb'$  mesure l'inclinaison des faces  $asb$  et  $asc$  de l'angle trièdre  $sabc$ , dans lequel :

$$\text{angle } as'b = c = 1^d - i = 10000' - i'$$

$$\text{angle } asc = b = 1^d - 1 = 10000' - 1'$$

$$\text{angle } csb = a.$$

$$\text{angle } c'sb' = A.$$

On aura donc :  $\cos a = \sin i \sin 1 + \cos i \cos 1 \cos A$ ,

$$\text{et } \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{\sin \left( \frac{a + (1 - i)}{2} \right) \sin \left( \frac{a - (1 - i)}{2} \right)}{\cos i \cos 1}$$

63. Lorsque l'on préjugera que  $A$  devra peu différer de  $a$ , c'est-à-dire que  $(A - a)$  sera très-petit ; la recherche directe de  $(A - a)$  mettra en évidence des approximations, que l'on ne reconnaît pas, d'abord, dans la formule précédente.

Ainsi, en représentant  $(A - a)$  par  $x$ , et par  $x$  l'arc de rayon  $a$  qui sert de mesure à cet angle, on aura :

$$\cos A = \cos a \cos x - \sin a \sin x$$

Or,  $\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ ,  $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 4 \sin^3 \frac{x}{2}$ ,

§ 54; et, si on remplace  $\sin \frac{x}{2}$  par  $\frac{x}{2R}$ :  $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2R^2}$ ,

$\sin x = \frac{x}{R} - \frac{x^3}{8R^3}$ . En admettant, alors, que  $\frac{x}{R}$  soit assez petit pour que les seconds termes des valeurs de  $\cos x$  et  $\sin x$  puissent être négligés [ce qui aura lieu, lors même que  $x$  vau-

dra 2 grad. car  $\left(\frac{\text{arc } 2^\circ}{R}\right)^2 < \frac{1}{1024}$  et  $\left(\frac{\text{arc } 2^\circ}{R}\right)^3 < \frac{1}{32768}$ ],

il viendra:  $\cos A = \cos a - \frac{x}{R} \sin a$ , au moyen de quoi,

l'expression  $\cos a = \sin i \sin i + \cos i \cos i \cos A$  devient:

$$\frac{x}{R} \sin a \cos i \cos i = \cos a (\cos i \cos i - 1) - \sin i \sin i$$

et, à cause des formules (L) du § 54:

$$\frac{x}{R} \cos i \cos i = \left(\frac{1 - \cos a}{\sin a}\right) \sin^2 \left(\frac{i + i}{2}\right) - \left(\frac{1 + \cos a}{\sin a}\right) \sin^2 \left(\frac{i - i}{2}\right)$$

Enfin, en vertu des expressions (N) du même §:

$$x = \frac{\left[ \text{tg } \frac{a}{2} \sin^2 \left(\frac{i + i}{2}\right) - \cot \frac{a}{2} \sin^2 \left(\frac{i - i}{2}\right) \right] R}{\cos i \cos i}$$

Si l'on veut  $x$  en centigrades, on remplacera  $\frac{R}{\text{arc } 1^\circ}$

par  $\frac{1}{\sin 1^\circ}$ , et l'on aura:

$$\frac{x}{1^\circ} = \frac{\text{tg } \frac{a}{2} \sin^2 \left(\frac{i + i}{2}\right) - \cot \frac{a}{2} \sin^2 \left(\frac{i - i}{2}\right)}{\cos i \cos i}$$

64. Lorsque les angles  $i$  et  $i$  seront assez petits, pour pouvoir remplacer, dans cette formule,  $\sin i$  par  $\frac{\text{arc } i}{R}$ ,  $\sin i$  par  $\frac{\text{arc } i}{R}$ , et y négliger les termes contenant les puis-

sances de  $\frac{i}{R}$  ou  $\frac{i}{R}$  supérieures à la 2.<sup>e</sup> [ce qui aura lieu quand les angles  $i$  et  $i'$  ne dépasseront pas 5°, car  $\left(\frac{\text{arc } 5^\circ}{R}\right)^2 = \frac{1}{2197}$ ]; alors,  $\sin\left(\frac{1+i}{2}\right)$ ,  $\sin\left(\frac{1-i}{2}\right)$  pourront aussi être remplacés par  $\frac{\text{arc } (1+i)}{2R}$ ,  $\frac{\text{arc } (1-i)}{2R}$ ; le produit  $\cos i \cos i'$  par l'unité, et la valeur de  $\frac{x}{R}$  deviendra :

$$\frac{x}{R} = \left(\frac{1+i}{2R}\right)^2 \text{tg } \frac{a}{2} - \left(\frac{1-i}{2R}\right)^2 \cot \frac{a}{2}$$

d'où  $\left(\frac{1-i}{1'}\right) = \left(\frac{1+i}{2}\right)^2 \text{tg } \frac{a}{2} \sin 1' - \left(\frac{1-i}{2}\right) \cot \frac{a}{2} \sin 1'$   
 $i$  et  $i'$  étant les nombres de centigrades contenus dans les inclinaisons  $\text{csc}'$ ,  $\text{ssb}'$  (fig. 20.)

En remplaçant, dans ce dernier résultat,  $i$  et  $i'$  par leurs formes primitives ( $1^d \rightarrow b'$ ), ( $1^d \rightarrow c'$ ) ou ( $10000' \rightarrow b'$ ), ( $10000' \rightarrow c'$ ), § 62, on aura :

$$\left(\frac{1-a}{1'}\right) = \left(10000 - \frac{(b+c)}{2}\right)^2 \text{tg } \frac{a}{2} \sin 1' - \left(\frac{b-c}{2}\right)^2 \cot \frac{a}{2} \sin 1'.$$

Cette formule est employée pour réduire à l'horizon les angles observés en géodésie, § 320, Livre III.

65. Dans le cas particulier, où l'un des côtés de l'angle  $a$  sera dans le plan de projection,  $c \rightarrow d : 1 = 0$ , la primitive réduction du § 63 deviendra  $\frac{x}{R} \sin a \cos i = \cos a (\cos i - 1)$ ,

qui, à cause de  $1 - \cos i = \sin i \text{tg } \frac{i}{2}$ , § 54 p. 26, produit :

$$\frac{x}{R} = -\cot a \text{tg } i \text{tg } \frac{i}{2} \quad \text{et} \quad \frac{a-A}{1'} = \frac{\cot a}{\sin 1'} \text{tg } i \text{tg } \frac{i}{2},$$

on trouve l'utilité dans l'observation des inclinaisons zénithales, § 288, Livre II Chap. IV.



## NOTES QUI MODIFIENT LE CHAPITRE II.<sup>e</sup> DE L'INTRODUCTION A LA TOPOGRAPHIE.

NOTE 1.<sup>re</sup>, suite du § 55, page 27.

55 bis. Lorsqu'on voudra construire les angles au moyen de leurs indices trigonométriques, il faudra calculer les tables des valeurs naturelles de ces indices, en cherchant les nombres correspondant aux logarithmes des tables trigonométriques; la table des quintuples-tangentes du § 309, page 180, satisfait à ce but.

On forme aussi une table des valeurs  $2 \sin \frac{x}{2}$  fournissant, pour chaque angle  $x$ , le rapport de la corde  $c$  de son arc au rayon  $R$ .

NOTE 2.<sup>e</sup> qui supprime le § 79 de la page 40.

55 ter. Le lieu géométrique des sommets  $t, t', t'', \dots$  d'angles égaux  $gtd, gt'd, gt''d, \dots$ , dont les côtés passent par les mêmes points  $g$  et  $d$  (fig. 25), est un arc circulaire qui termine le segment capable de l'angle donné  $gtd = z$  décrit sur  $gd$ .

L'arc d'un segment capable, ou l'arc capable, peut se tracer d'un mouvement continu ou par points.

On obtient l'arc capable, par un mouvement continu : en en déterminant le centre, soit au moyen de la droite  $gr$  (fig. 26), considérée comme tangente faisant avec la corde  $gd$  l'angle donné  $z$ ; soit en calculant la longueur du rayon  $gc = \frac{gd}{2 \sin z}$ .

Les deux positions symétriques  $dgr, dgr'$  de l'angle  $z$ , relativement à  $gd$ , fournissent deux arcs  $dxg, dyg$  qui ap-

partiennent respectivement aux constructions *en-deçà* et *au-delà* de  $gd$ .

Pour décrire, par points, l'arc capable d'un angle  $DZG$  (fig. 25) et passant par  $g$  et  $d$ , en-deçà de  $gd$  : on mène dans cet espace, par le point  $d$ , les droites  $dt$ ,  $dt'$ ,  $dt''$ ...., et l'on conduit ensuite, par le point  $g$ , des lignes formant, avec les précédentes, les angles  $dtg$ ,  $dt'g$ ,  $dt''g$ .... égaux à  $DZG$ .

NOTE 3.<sup>e</sup> à substituer à la solution graphique du § 77, page 39.

On tracera les angles  $DZA$ ,  $AZG$  sur une feuille auxiliaire (fig. 25), qu'on disposera de manière à faire passer simultanément les directions  $zd$ ,  $za$ ,  $zg$  par les points respectifs  $d$ ,  $a$ ,  $g$ , pour décalquer ensuite le point  $z$  en  $z$ .

Ou, mieux encore : sur  $da$  représentant  $DA$  (fig. 25), on décrira l'arc  $vv''$  capable de l'angle  $DZA$ , § 55 *ter* note 2.<sup>e</sup>, et, sur  $ag$  représentant  $AG$ , l'arc  $rr''$  capable de l'angle  $AZG$  : le point de rencontre  $z$ , le seul que les arcs tracés puissent avoir de commun, outre le point  $a$ , sans se confondre, sera la position graphique de  $z$ .

L'arc  $tt''$ , capable de l'angle  $DZG$  et décrit sur  $dg$  représentant  $DG$ , devra passer par  $z$  pour vérifier la construction des deux autres arcs.

Ce problème, dont nous avons fait un cas particulier de la question générale du § 69, donne le moyen de rattacher immédiatement une station à deux bases, ou à trois points connus et visibles de cette station.

77 *bis*. Les précédents arcs capables ne devant être utiles que dans le voisinage de leur point commun ; on en fera la construction *par points* de la manière suivante :

Ayant tracé la direction quelconque  $ar'$  (fig. 25) ; on mènera par  $d$  et  $g$  les droites  $dv'$ ,  $gr'$  formant avec  $ar'$  les angles respectifs  $DZA$ ,  $AZG$  ; ce qui fournira trois points

$r', t', v'$ , appartenant chacun à un arc capable particulier. On tirera, ensuite, une seconde direction  $ar''$  avec laquelle on fera les angles  $dv''a = \angle ZA$  et  $ar''g = \angle ZG$ , pour obtenir les seconds points  $r'', t'', v''$  des arcs. En traçant alors les droites  $r'r'', v'v''$ : le point de convergence de ces cordes conjuguées, s'il ne peut être pris pour la rencontre de leurs arcs, indiquera l'emplacement de cette rencontre, c'est-à-dire, la partie où il faudra construire les éléments des arcs capables. Ce sera donc sur la troisième direction  $ar$ , voisine et au-delà du concours présumé, qu'on appuiera les angles  $dva = \angle ZA$  et  $arg = \angle ZG$ , pour avoir les troisièmes points  $r, t, v$  des arcs cherchés; en sorte que les intersections des petites cordes  $rr', tt', vv'$  se confondront matériellement au point de rencontre  $z$  de leurs arcs, ou passeront si près de ce point qu'une quatrième direction d'appui procurera infailliblement ce résultat.

Les cordes conjuguées des segments capables seront toujours convergentes; car, si elles devenaient parallèles sans se confondre, elles auraient, avant et après le parallélisme, des convergences opposées, dont chacune indiquerait un point de concours aux trois arcs capables, qui coïncideraient alors comme ayant trois points communs.

NOTE 4.<sup>e</sup> à substituer au § 78. page 40.

78. S'il arrive que la construction des angles  $\angle ZA$ ,  $\angle ZG$ , sur le premier appui  $ax$  (*fig. 25*), fasse confondre, en  $z$ , les premiers points des arcs capables: il n'en faudra pas moins chercher un second point de chaque arc, en donnant aux angles  $\angle ZA$ ,  $\angle ZG$  un autre appui  $ar''$ , non-voisin de  $ax$ . Et, quand la nouvelle construction superposera aussi les seconds points des arcs capables, ou les donnera très rapprochés: elle indiquera que ces arcs coïncident, ou se coupent assez obliquement pour laisser du doute sur la position graphique du lieu de station.

On devra alors, pour déterminer graphiquement ce lieu  $z'$ , recourir à une autre station  $z$  avantageusement prise dans la direction  $Az$ , et qui, éloignée de la circonférence  $DAG$ , se placera nettement en  $z$ , pour procurer ensuite le point  $z'$  homologue à  $z'$ .

On évitera, d'ailleurs, qu'une station  $z$  soit dans le voisinage de la circonférence définie par les trois repères  $D, A, G$  : en la choisissant telle que l'un des points  $D, A, G, z$  se trouve dans la surface du triangle formé par les trois autres (*fig. 24*).

---

*Questions Trigonométriques auxquelles se rapportent les opérations de Planimétrie.*

66. Deux moyens seront employés pour résoudre ces questions : l'un, *numérique*, conduira à des rapports de longueurs, en remplaçant les éléments angulaires du problème par leurs indices trigonométriques ; l'autre, *graphique*, consistera à tracer les résultats donnés par l'observation, à mesure et tels qu'on les obtiendra.

67. Un point  $z$  est déterminé sur un plan (*fig. 22*) : par ses distances à deux autres points  $A$  et  $B$  connus sur ce plan :

En considérant  $z$  comme sommet d'un triangle ayant pour base  $AB$  : les distances *déterminantes* de ce point se concluront des observations convenables à la solution des triangles.

On dit que le point  $z$  est *rattaché* à la base  $AB$  : quand on a effectué les mesures nécessaires au calcul ou à la construction du triangle  $zAB$ .

Des points quelconques, situés sur un plan, peuvent se coordonner entre eux, quand on connaît leurs distances deux à deux ; lesquelles se concluent des *rapports* de ces mêmes distances, et de la *valeur* d'une seule d'entre elles.

68. Si on rattache, par des mesures d'angles, plusieurs points d'un plan à une même base prise à volonté dans ce plan : on pourra trouver les rapports de la base aux distances de ces points deux à deux.

En effet, soient les points  $A, B, V, \dots$  (*fig. 21*) rattachés à la base  $uz$  par les triangles  $Auz, Buz, Vuz, \dots$ , dans chacun desquels on a mesuré les angles en  $u$  et  $z$ .

*Solution numérique.*

Le triangle  $AUZ$  fournit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{AU}{UZ} = \frac{\sin AZU}{\sin (AZU + AUZ)} = s \\ \frac{AZ}{UZ} = \frac{\sin AUZ}{\sin (AZU + AUZ)} = s' \end{array} \right.$$

triangle  $BUZ$ . . . . .

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{BU}{UZ} = \frac{\sin BZU}{\sin (BZU + BUZ)} = n \\ \frac{BZ}{UZ} = \frac{\sin BUZ}{\sin (BZU + BUZ)} = n' \end{array} \right.$$

triangle  $VUZ$ . . . . .

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{VU}{UZ} = \frac{\sin VZU}{\sin (VZU + VUZ)} = p \\ \frac{VZ}{UZ} = \frac{\sin VUZ}{\sin (VZU + VUZ)} = p' \end{array} \right.$$

d'où l'on tire :  $\frac{AU}{BU} = \frac{s}{n}$ ,  $\frac{AU}{VU} = \frac{s}{p}$ , .....  $\frac{BU}{VU} = \frac{n}{p}$ , ..... on

connaît alors, dans chacun des triangles dont le sommet est en  $U$  : l'angle  $U$  résultant d'angles observés, et le rapport des côtés qui le comprennent ; il sera donc possible de calculer  $\frac{AB}{AU}$ ,  $\frac{AV}{AU}$  ... (1), dont la combinaison avec les relations précédentes produira les rapports  $\frac{AB}{UZ}$ ,  $\frac{BV}{UZ}$ , .....  $\frac{AB}{BV}$ ,  $\frac{BV}{AV}$  ..... Le calcul des triangles dont le sommet est en  $Z$  servirait à vérifier ces résultats.

*Solution graphique.* Sur une longueur arbitraire  $u'z'$ , on construit, avec les angles mesurés, les triangles  $a'u'z'$ ,  $b'u'z'$ ,  $c'u'z'$ .... ; le polygone ayant pour sommet  $u'$ ,  $b'$ ,  $a'$ ,  $z'$ ,  $v'$ .... sera semblable au polygone  $UBAZV$ ...., dont les côtés seront en rapport comme ceux des côtés homologues de  $u'b'a'z'v'$ .

69. On conclut de là : que, étant donnée l'une quelconque des distances considérées, on pourra calculer ou construire toutes les autres au moyen de mesures d'angles, et coordonner, par conséquent, plusieurs points d'un plan, en les ratta-

(1) Par la formule :  $\frac{c^2}{a^2} = 1 + \frac{b^2}{a^2} - 2 \frac{b}{a} \cos C$  du § 56-page 27.

chant à une même base auxiliaire, accessible <sup>(1)</sup> à ses extrémités.

*Solution numérique.* Supposons, en effet, que le côté  $AB$  soit donné en nombre: les rapports  $\frac{AB}{UZ}$ ,  $\frac{BV}{UZ}$ ,  $\frac{AV}{UZ}$ ,... (fig. 21) précédemment obtenus, au moyen des angles mesurés en  $U$  et  $Z$ , conduiront aux rapports  $\frac{AV}{AB}$ ,  $\frac{BV}{AB}$ ,... qui détermineront numériquement les distances  $AV$ ,  $BV$ ,....

*Solution graphique.* Si  $AB$  est représenté graphiquement par  $ab$ : on construira sur ce dernier côté une figure semblable au polygone  $a'b'u'v'z'$ ...., qui a été auxiliairement formé sur la longueur arbitraire  $u'z'$ ; et les points  $z$ ,  $v$ ,  $u$ ,.... seront les positions graphiques de leurs homologues  $z$ ,  $v$ ,  $u$ ,....

On fera, pour cela,  $b'a'' = ba$ ; et les triangles  $b'a''z''$ ,  $b'a''v''$ ,  $b'a''u''$ ...., tracés semblablement à leurs homologues  $b'a'z'$ ,  $b'a'v'$ ,  $b'a'u'$ .... par les droites  $b''z''$ ,  $b''v''$ ,  $b''u''$ .... respectivement parallèles à  $b'z'$ ,  $b'v'$ ,  $b'u'$ ...., se reporteront sur  $ba$  par des intersections d'arcs circulaires.

On pourra, aussi, construire immédiatement sur  $ba$  les triangles  $bax$ ,  $bav$ ,  $bau$ ,.... au moyen de l'angle de transformation  $b'a'y$ , obtenu avec les longueurs homologues  $a'b'$  et  $ab$ , § 115 page 65: tellement que chaque côté  $a'x'$  de la figure  $b'a'z'v'u'$ ..., porté en  $a'x$  et  $a'x'$ , fournira le côté homologue  $xx'$ , ou  $ax$ , de la figure  $baxvu$ ....

On opérera, même, plus commodément sur tous les côtés de la figure auxiliaire: en dressant l'angle de transformation dans les deux sens  $b'a'y$  et  $a'b'y'$ .

70. Il est facile de voir, maintenant, que des points rattachés à une base se coordonneront à d'autres points rapportés à une seconde base, si ces deux bases ont été préalablement rattachées entre elles.

Car, de ce qu'un point  $v$  (fig. 21) sera lié par le triangle

(1) On dit qu'un lieu est accessible pour une observation: lorsqu'on peut y manœuvrer les instruments nécessaires à cette observation.

vzu à la base uz, pendant que celle-ci se rattachera à une autre base AB par les triangles AUB, AZB, il s'en suivra que les points v, A et B seront rattachés à la même base uz, et, par conséquent, coordonnés entre eux.

On parviendra donc à lier géométriquement plusieurs points d'un plan : en les rattachant à une même base auxiliaire, ou à des bases différentes pouvant se coordonner entre elles. Et, afin de simplifier les observations, calculs et constructions de chaque problème : on cherchera à appuyer les extrémités et les directions de ces bases auxiliaires, sur ceux des points considérés, qui seront accessibles et convenablement disposés.

71. Appliquons au moyen de lier un point accessible z à une base AB, la recherche des simplifications dont ce problème est susceptible dans ses différents cas.

Si l'extrémité A est accessible (fig. 22) : elle servira de station, où l'on mesurera l'angle ZAB qui, avec l'angle AZB observé en z, concourra à la solution du triangle ABZ : numériquement, par  $\frac{BZ}{AB} = \frac{\sin ZAB}{\sin AZB}$ ,  $\frac{AZ}{AB} = \frac{\sin (ZAB + AZB)}{\sin AZB}$ ; et graphiquement, en faisant angle  $z'ab = ZAB$ , puis conduisant par b, la droite bz'' inclinée de AZB sur az', § 96 page 50.

72. Dans le cas où l'inclinaison ZAB sera connue, la mesure d'un seul angle AZB suffira au problème (fig. 22); et, comme AB sin ZAB est la valeur de la distance BP du point B à la direction ZA, BZ sera donnée par  $\frac{BP}{\sin AZB}$  qui ne dépend pas de la longueur BA, c'est-à-dire, de la position de A sur ZA. Donc, un point quelconque z d'un alignement connu ZA, se déterminera en mesurant un seul angle BZA, arrêté par un point B extérieur à cet alignement.

73. Quand les deux points A, B seront inaccessibles : on emploiera un autre point accessible u (fig. 21), et l'on rattachera A et B à la base auxiliaire uz par les angles BUZ, AUZ, BZU, AZU, comme nous l'avons vu § 69.

La détermination, par des mesures d'angles, d'une di-



stance accessible au moyen d'une base inaccessible, est implicitement comprise dans cette question.

74. Lorsque, les points  $A$  et  $B$  étant inaccessibles, l'extrémité  $u$  ou  $v$  de la base auxiliaire pourra se placer sur l'alignement  $AB$ , on abrégera les calculs et la construction du problème (fig. 23).

Car, en observant l'angle  $AUZ$  et les angles  $AZU$ ,  $BZU$ ; on conclura aussitôt :

$$\text{angle } BAZ = 2^d - AUZ - AZU$$

$$\text{angle } ABZ = AUZ - BZU,$$

et, par conséquent :

$$\frac{AZ}{AB} = \frac{\sin (AUZ - BZU)}{\sin (AZU + BZU)}$$

$$\frac{BZ}{AB} = \frac{\sin (AUZ + AZU)}{\sin (AZU + BZU)}$$

Quant à la *solution graphique* de cette question : on tracera une droite inclinée sur  $ab$  de  $au'z'' = AUZ$ , on conduira ensuite les lignes  $bz$  et  $az$ , telles que  $bz'u' = BZU$  et  $az''u' = AZU$ ; ce qui rendra  $z$  position graphique de  $Z$ , et par suite,  $zu$ , menée parallèlement à  $z''u'$ , représentera la base auxiliaire  $ZU$ .

75. En remarquant que la station  $u$  sert à déterminer l'inclinaison de  $AB$  sur la base auxiliaire : on conclura que la station  $z$  sera seule nécessaire pour résoudre la question précédente, quand on aura l'inclinaison de la base inaccessible sur une direction auxiliaire ; c'est-à-dire que, la détermination d'un point accessible  $z$  (fig. 23), au moyen d'une base inaccessible  $AB$ , dont on connaîtra l'inclinaison  $AUZ$  sur une droite quelconque  $zu$ , consistera à observer les angles  $AZU$ ,  $BZU$ , qui serviront à calculer immédiatement  $\frac{AZ}{AB}$ ,  $\frac{BZ}{AB}$ ; ou qui, étant rapportés en  $az''u'$ ,  $bz'u'$ , donneront la position graphique  $z$  de  $Z$ .

76. Si, enfin, le lieu  $z$  appartenait à une direction  $uz$ , coordonnée d'avance aux deux points inaccessibles  $A$ ,  $B$  (fig. 23) sans être matériellement repérée; il suffirait de mesurer l'angle  $AZB$ , pour résoudre le triangle  $ABZ$ .

Car, l'angle  $\text{BUZ}$  et le rapport  $\frac{\text{BU}}{\text{AB}}$  rattachant la direction  $\text{UZ}$  à la base  $\text{AB}$ , les triangles  $\text{BZU}$ ,  $\text{AZU}$ ,  $\text{ABZ}$  donneront :

$$\left(\frac{\text{BZ}}{\text{AB}}\right)^2 = \left(\frac{\text{UZ}}{\text{AB}}\right)^2 + \left(\frac{\text{BU}}{\text{AB}}\right)^2 - 2 \frac{\text{UZ}}{\text{AB}} \frac{\text{BU}}{\text{AB}} \cos \text{BUZ} \dots \S 56,$$

$$\left(\frac{\text{AZ}}{\text{AB}}\right)^2 = \left(\frac{\text{UZ}}{\text{AB}}\right)^2 + \left(\frac{\text{AB}-\text{BU}}{\text{AB}}\right)^2 + 2 \frac{\text{UZ}}{\text{AB}} \left(\frac{\text{AB}-\text{BU}}{\text{AB}}\right) \cos \text{BUZ}$$

$$1 = \left(\frac{\text{BZ}}{\text{AB}}\right)^2 + \left(\frac{\text{AZ}}{\text{AB}}\right)^2 - 2 \frac{\text{BZ}}{\text{AB}} \frac{\text{AZ}}{\text{AB}} \cos \text{AZB}$$

d'où l'on éliminera  $\frac{\text{UZ}}{\text{AB}}$ , pour tirer numériquement  $\frac{\text{BZ}}{\text{AB}}$  et  $\frac{\text{AZ}}{\text{AB}}$ .

La très simple *solution graphique* consistera à décrire, sur  $\text{ba}$ , le segment capable de l'angle observé  $\text{AZB}$ ; lequel segment  $\text{bzkt a}$  coupera la ligne donnée  $\text{uz}$ , au point cherché  $z$ . Et, si la direction tracée  $\text{vz''}$  rencontrait le prolongement de  $\text{ba}$ : le segment  $\text{bzkt a}$  la couperait en deux points  $t$ ,  $z$ , dont l'un  $z$  serait facilement choisi pour correspondre à  $z$ .

77. Quand, pour rattacher un point accessible  $z$  à deux points inaccessibles  $\text{D}$ ,  $\text{G}$  (*fig. 24, 25*), on pourra appuyer la base auxiliaire sur un troisième point  $\text{A}$ , lié à  $\text{D}$  et  $\text{G}$ : la station  $z$ , où l'on observera les angles  $\text{DZA}$ ,  $\text{GZA}$ , suffira pour conclure les angles  $\text{GAZ}$ ,  $\text{ZAD}$ , et conséquemment, pour calculer ou construire la position de cette station.

*Solution numérique.* Le triangle  $\text{ADZ}$  fournit:  $\frac{\text{AD}}{\text{AZ}} = \frac{\sin \text{DZA}}{\sin \text{ADZ}}$   
le triangle  $\text{AGZ}$ . . . .  $\frac{\text{AG}}{\text{AZ}} = \frac{\sin \text{GZA}}{\sin \text{AGZ}}$

d'où l'on tire :  $\frac{\sin \text{AGZ}}{\sin \text{ADZ}} = \frac{\text{AD} \sin \text{GZA}}{\text{AG} \sin \text{DZA}}$ ; et, comme les

angles  $\text{DZA}$ ,  $\text{GZA}$  ont été mesurés, que d'ailleurs  $\frac{\text{AD}}{\text{AG}}$  résulte de la liaison supposée entre les points  $\text{A}$ ,  $\text{D}$  et  $\text{G}$ , on pourra écrire  $\frac{\sin \text{AGZ}}{\sin \text{ADZ}} = n$ , et par suite :

$$\frac{\sin \text{AGZ} + \sin \text{ADZ}}{\sin \text{AGZ} - \sin \text{ADZ}} = \frac{n + 1}{n - 1} = \frac{\text{tg} \left( \frac{\text{AGZ} + \text{ADZ}}{2} \right)}{\text{tg} \left( \frac{\text{AGZ} - \text{ADZ}}{2} \right)} \dots \text{(E)}$$

or, dans le triangle AGZ, on a :  $AGZ + GZA + GAZ = 2$  droits,  
le triangle ADZ.....  $ADZ + DZA + ZAD = 2$  droits,  
en ajoutant ces deux équations, il vient :

$$(AGZ + ADZ) + (GZA + DZA) = 4^d - (GAZ + ZAD)..... (K)$$

Maintenant, dans la figure 24, où le point A est intérieur au triangle GDZ, on a :

$$GAZ + ZAD = 4^d - GAD = 2^d + (ADG + AGD)$$

qui transforme l'équation (K) en :

$$\left(\frac{AGZ + ADZ}{2}\right) + \left(\frac{GZA + DZA}{2}\right) = 1^d - \left(\frac{ADG + AGD}{2}\right)$$

Dans la figure 25, où le point A est extérieur au triangle GDZ, on a :

$$GAZ + ZAD = GAD = 2^d - (ADG + AGD)... (1),$$

qui, substitué dans l'équation (K), donne :

$$\left(\frac{AGZ + ADZ}{2}\right) + \left(\frac{GZA + DZA}{2}\right) = 1^d + \left(\frac{ADG + AGD}{2}\right)$$

On connaîtra donc  $\left(\frac{AGZ + ADZ}{2}\right)$ , dans tous les cas; et alors,

l'équation (E) déterminera  $\left(\frac{AGZ - ADZ}{2}\right)$ . On évaluera, par

conséquent, les angles AGZ, ADZ, ainsi que GAZ, ZAD, DGZ et GDZ; ce qui permettra de résoudre le triangle GDZ, pour conclure la position du point z.

*Solution graphique.* Sur da représentant DA (fig. 25), on décrira le segment vv'v'' capable de l'angle DZA, et, sur ag représentant AG, le segment rr'r'' capable de l'angle AZG : le point de rencontre z, le seul que les arcs tracés puissent avoir de commun, outre le point a, sans se confondre, sera la position graphique de z.

On pourrait encore, pour obtenir le point z, marquer les angles GZA, AZD, sur une feuille auxiliaire qu'on placerait de

(1) Les angles du triangle aab résultent de la formule

$2 \cos C = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - \frac{c}{a} \cdot \frac{c}{b}$  du § 56 p. 27, au moyen des rapports  $\frac{AB}{BC}, \frac{AC}{BC}$  qui coordonnent les points A, B et C.

manière à faire passer les directions  $zd$ ,  $za$ ,  $zg$  simultanément par les points respectifs  $d$ ,  $a$ ,  $g$ , et décalquer ensuite le point  $z$  en  $z$ .

Ce problème, dont nous avons fait un cas particulier de la question générale du § 69, donne le moyen de rattacher immédiatement une station à deux bases, ou à trois points connus et visibles de cette station.

78. Cependant, si la station  $z'$  se trouvait sur la circonférence définie par les trois points  $d$ ,  $a$ ,  $g$  (fig. 25), on même près de cette circonférence: les segments décrits sur  $ad$  et  $ag$  se confondraient, ou se couperaient assez obliquement pour laisser le point  $z'$  indéterminé. Il faudrait, alors, stationner en un autre lieu  $z$ , avantageusement pris dans la direction  $az'$ ; et ce nouveau point, éloigné de la circonférence  $dag$ , se placerait très nettement en  $z$  et procurerait, en même temps, le point  $z'$  homologue à  $z'$ .

79. Les segments capables, auxquels nous venons de recourir § 76, 77, 78, peuvent se tracer d'un mouvement continu, ou par points.

Un segment capable se trace d'un mouvement continu: en en déterminant le centre, soit au moyen de la ligne  $gr$  (fig. 26), considérée comme tangente-faisant avec la corde  $gd$  l'angle donné  $z$ ; ou bien en calculant la longueur du rayon  $gc = \frac{gd}{2 \sin z}$ .

Les deux positions symétriques  $dgr$ ,  $dgr'$  de l'angle  $z$ , relativement à  $gd$ , fournissent deux segments  $daxg$ ,  $dbyg$  qui appartiennent respectivement aux constructions *en-deçà* et *au-delà* de  $gd$ .

Pour décrire, par points, le segment capable d'un angle  $dzg$  (fig. 25) et passant par  $g$  et  $d$ , en-deçà de  $gd$ : on mène dans cet espace, par le point  $d$ , les droites  $dt$ ,  $dt'$ ,  $dt''$ , ..., et l'on conduit ensuite, par le point  $g$ , des lignes formant avec celles-ci les angles  $dtg$ ,  $dt'g$ ,  $dt''g$ , ..., égaux à  $dzg$ .

80. Il résulte du § 72: que l'on pourra toujours considérer un point donné extérieurement à une direction connue,

comme déterminant une distance à laquelle on rattachera d'autres points, par des mesures d'angles.

En effet, puisque, au moyen de l'inclinaison  $BZA$  (fig. 27), une base  $zB$  se conclut des données indiquées; il n'y aura plus qu'à rattacher les points proposés à cette base.

Or, si la direction  $AZ$  est accessible en  $z$ , on y observera l'inclinaison  $BZA$ .

Mais, si l'alignement  $AZ$  est inaccessible; on sera obligé de choisir deux stations auxiliaires  $u, v$ , où l'on mesurera les angles  $BUV, ZUV, AUV; BVU, ZVU, AVU$ , destinés à coordonner à la base  $uv$ , le point  $B$  et deux repères  $z, A$  de la direction donnée.

On a montré, § 68 page 34, comment on parvenait numériquement aux rapports de tous les côtés, deux-à-deux, de la figure  $BUVAZ$ , et au calcul de l'inclinaison  $BZA$ , qui permet de remplacer  $zB$  par  $\frac{BP}{\sin BZA}$  et de conclure tous les côtés de la figure, en fonction de la distance donnée  $BP$ .

La solution graphique de ce problème consiste à décrire, avec les angles observés, la figure auxiliaire  $u'v'a'z'b'$  qu'on reporte; ensuite, sur la direction  $za''$ : soit par le décalque, soit en faisant  $z'a'' = z'a'$ , et plaçant, au moyen d'arcs circulaires, les points  $b', u', v'$  en  $b'', u'', v''$ ; après quoi, la figure  $u''v''az''b''$ , semblable à  $u'v'a'z'b'$  déterminera les positions graphiques de  $u, v, A, z, B$ .

81. On reconnaîtra, immédiatement, qu'un même point inaccessible  $z$  a été observé de trois stations  $A, D, G$  (fig. 25): au moyen des angles qui rattachent ces stations entre elles:

En effet, on exprimera que  $z$  est sommet commun aux deux triangles  $GDZ, ADZ$ : en égalant les valeurs de  $zD$  tirées de l'un et l'autre triangle, c'est-à-dire:

$$\frac{GD \sin DGZ}{\sin (DGZ + GDZ)} = \frac{AD \sin DAZ}{\sin (DAZ + ADZ)}; \quad \text{mais} \quad \frac{GD}{AD} = \frac{\sin GAD}{\sin AGD},$$

donc:  $\sin (DAZ + ADZ) \frac{\sin GAD}{\sin DAZ} = \sin (DGZ + GDZ) \frac{\sin AGD}{\sin DGZ}$

sera la condition à vérifier approximativement, pour que  $z$  soit commun aux côtés  $Dz$ ,  $Az$  et  $Gz$ .

Cette épreuve est utile au § 322, Livre III.

82. Quand on recourra à des bases auxiliaires, pour coordonner ensemble plusieurs points d'un plan: la disposition et les longueurs de ces bases devront être telles que leur liaison, par des mesures d'angles, se ressente le moins possible des erreurs d'observation de ces angles. Il faudra, donc, chercher quelle forme et quelle étendue conviendront le mieux à chacun des triangles, qui doivent fournir des bases auxiliaires ou les rattacher entre elles, pour obtenir la moindre accumulation d'erreurs dans les résultats.

Remarquons, à cet effet, que, dans un triangle quelconque  $ABC$  (fig. 28), l'inexactitude  $d_{AB}$  sur la mesure de l'angle  $CAB$  occasionne, au côté opposé  $CB$ , une erreur  $dB$  dépendant principalement de la longueur du côté adjacent  $AB$ ; de sorte que l'erreur numérique, qui en proviendra dans la solution du triangle, sera le rapport  $\frac{dB}{AB}$  (différence entre le résultat exact  $\frac{CB}{AB}$  et le rapport  $\frac{Cd}{AB}$ , que l'on substitue à  $\frac{Cd}{Ad}$  fourni par la solution du triangle  $cad$ ).

Or, le triangle  $dAB$  donne  $\frac{dB}{AB} = \frac{\sin d_{AB}}{\sin A dB}$ ; et, à cause que  $\sin A dB = \sin (d_{AB} + CBA)$ , on aura, en représentant angle  $d_{AB}$  par  $\varphi$ , angle  $CBA$  par  $B$ , erreur  $dB$  par  $e'$ , et côté  $AB$  par  $c$ :  $\frac{e'}{c} = \frac{\sin \varphi}{\sin (B + \varphi)}$ . Si on nomme  $e''$ ,  $e'''$  les erreurs produites sur les côtés  $AC$ ,  $AB$  par l'inexactitude  $\varphi$ , que le même instrument angulaire occasionnerait aux angles  $B$  et  $C$ ; on pourra écrire :

$$\frac{e'}{c} = \frac{\sin \varphi}{\sin (B + \varphi)}, \quad \frac{e''}{a} = \frac{\sin \varphi}{\sin (C + \varphi)}, \quad \frac{e'''}{b} = \frac{\sin \varphi}{\sin (A + \varphi)}.$$

Mais, la liaison des angles d'un triangle rend le dénominateur de l'une de ces expressions d'autant plus grand que les dénominateurs des autres sont moindres; conséquemment, plus

l'une des erreurs numériques  $\frac{e'}{c}$ ,  $\frac{e''}{a}$ ,  $\frac{e'''}{b}$  sera petite, plus les deux autres deviendront considérables. Ces quantités auront donc simultanément les moindres valeurs possible, quand les angles  $A$ ,  $B$ ,  $C$  seront égaux. Ainsi, la forme équilatérale sera la meilleure à donner à un triangle, pour atténuer, dans sa solution, l'erreur inhérente à la mesure des angles: on devra donc rechercher cette forme dans la disposition des bases auxiliaires.

83. De ce que  $\sin \varphi$  est toujours inférieur à chacune des quantités  $\frac{e'}{c}$ ,  $\frac{e''}{a}$ ,  $\frac{e'''}{b}$ ;  $\sin (B + \varphi)$ ,  $\sin (C + \varphi)$  et  $\sin (A + \varphi)$  ne dépassant jamais l'unité; on aura généralement:

$\sin \varphi < \frac{e}{c}$  et  $c < \frac{e}{\sin \varphi}$  (ce qu'on eût d'ailleurs trouvé immédiatement: au moyen de la perpendiculaire  $bp$  sur  $ad$  (fig. 28), donnant  $pa < da$ ,  $\sin \varphi = \frac{pb}{AB}$  et, par suite,

$\sin \varphi < \frac{da}{AB}$ ). Si donc, on adopte  $e^{\text{moy}}$  pour l'erreur tolérée dans l'évaluation de chaque côté d'un triangle, et  $\varphi$  pour incertitude de mesure due au goniomètre: le plus grand côté d'un triangle ne pourra, sans inconvénient, dépasser  $\frac{e^{\text{moy}}}{\sin \varphi}$ ;

et, en supposant  $\varphi$  assez petit pour que  $\varphi \sin 1'$ , ou  $\frac{\varphi}{6400}$ ,

remplace  $\sin \varphi$ , § 54 page 25, il viendra  $c < \frac{6400}{\varphi} e^{\text{moy}}$  qui,

lorsqu'il s'agira d'opérations graphiques où  $e = \frac{1}{10000}$ ,

§ 7 page 2, devient  $c < \frac{0.64}{\varphi}$ .

Donc enfin: la grandeur des bases auxiliaires sera limitée, en raison de l'exactitude exigée dans les derniers résultats et du soin apporté à la mesure des angles.

84. Quand on connaîtra le côté  $ac$ , ou  $b$ , et l'angle  $c$  (fig. 28);

il n'y aura que la relation  $\frac{e'}{c} = \frac{\sin \varphi}{\sin (B + \varphi)}$  qui soit affranchie des données  $b$  et  $c$ , et le côté  $BC$ , ou  $a$ , se ressentira seul de l'inexactitude  $\varphi$  d'observation angulaire, en éprouvant une erreur  $e'$  d'autant plus petite que  $\sin (B + \varphi)$  se rapprochera davantage de l'unité, ou que l'angle  $B$  différera moins d'un droit.

D'où résulte cette conclusion, particulièrement favorable aux opérations graphiques : que l'intersection rectangulaire est la plus propre à placer un point par deux directions.

85. Des points, liés entre eux par les moyens précédemment indiqués, peuvent aussi être coordonnés relativement à deux axes qui se coupent.

Soient les points  $u, v, B, A, z$  rattachés entre eux à l'aide des bases  $uv, Az$  (fig. 27); construisons, avec les angles observés, une figure provisoire  $u'v'a'z'b'$ , qui rappelle la manière dont ces points ont été liés à leurs bases respectives. Nous nous donnerons des axes *rectangulaires* : en adoptant les coordonnées rectangulaires d'un sommet, et l'inclinaison, ou *azimuth*, d'un côté de cette figure par rapport à l'un des axes. Par exemple, en assignant à l' $x$  et à l' $y$  du point  $b'$ , les longueurs  $\alpha$  et  $\beta$ ; et, en supposant que  $\lambda$  soit l'*azimuth* (droite à gauche) de  $u'a'$  sur l'axe des  $y$  : on mènera par  $b'$  une ligne  $b's$ , inclinée de  $\lambda$  sur la direction  $u'a'$  dans le sens de gauche à droite, § 96 page 50, et, portant sur cette ligne la longueur  $b's = \beta$ , on aura un point  $s$  de l'axe des  $x$  que l'on tracera alors, perpendiculairement à  $b's$ ; puis, faisant  $so = \alpha$ , le point  $o$  sera l'origine des coordonnées.

Maintenant, les différences de coordonnées des extrémités d'un côté quelconque  $u'x'$  se trouvent par :

$$\begin{aligned} tu' &= u'z' \sin tz'u' & \text{ou : } x' - x'' &= u'z' \sin \text{azimuth } u'x' \\ tz' &= u'z' \cos tz'u' & y' - y'' &= u'z' \cos \text{azimuth } u'x' \end{aligned}$$

Or, les azimuths de tous les côtés se concluront de celui de départ et des divers angles observés ;



car :

$$az. u'a' = \lambda$$

$$az. u'z' = az. u'a' + \text{ang. } a'u'z'$$

$$az. u'b' = az. u'z' + \text{ang. } z'u'b'$$

$$az. u'v' = az. u'b' + 4^d - \text{ang. } b'u'v'$$

$$az. v'u' = 2^d + az. u'v'$$

$$az. v'b' = az. v'u' - \text{ang. } b'v'u'$$

$$az. b'v' = 2^d + az. v'b'$$

$$az. a'u' = 2^d + \lambda$$

$$az. a'z' = az. a'u' - \text{ang. } u'a'z'$$

$$az. a'v' = az. a'z' + \text{ang. } z'a'v'$$

$$az. z'u' = 2^d + az. a'v'$$

$$az. z'v' = az. z'u' + \text{ang. } u'z'v'$$

On pourra, donc, calculer les différences des coordonnées de tous les points deux-à-deux ; et, par conséquent, les longueurs de ces coordonnées en fonction de celles  $\alpha$  et  $\beta$  du point de départ  $b'$ .



## LIVRE II.:

### DESCRIPTION ET USAGE DES INSTRUMENTS EMPLOYÉS EN TOPOGRAPHIE.

#### CHAPITRE I. : INSTRUMENTS UTILES AUX OPÉRATIONS GRAPHIQUES.

##### *La Règle et l'Équerre.*

86. Les constructions graphiques se font avec la *règle*, l'*équerre*, le *compas* et le *rapporteur angulaire*, que l'on a soin d'éprouver avant de les employer.

LA RÈGLE, ou plaque mince terminée par une ligne droite, est mal dressée : quand, étant retournée, sens-dessus-dessous, par les extrémités  $q$ ,  $s$  de sa ligne de foi (fig. 43), les deux traces  $qrs$ ,  $qr's$  de cette ligne ne coïncident pas entièrement.

On improvise une règle : en pliant une feuille de papier *eff'e'* sur elle-même (fig. 43), pour former la ligne de foi  $qs$ .

87. On transporte une droite  $tx$  parallèlement à elle-même (fig. 30) : en faisant glisser, le long d'une règle  $yn$ , une plaque  $ytx$ , coupée en ligne droite dans les deux sens  $yt$  et  $tx$  pour former l'angle  $ytx$ .

Mais, quand la parallèle  $xn$ , à tracer par le point  $x$  (fig. 31), devra être plus longue qu'un *décimètre*; le moindre dérangement de la règle d'appui occasionnera une erreur sensible à l'extrémité  $n$  de cette parallèle, qu'il sera alors préférable de marquer avec la règle seule, dirigée par  $x$  sur le point  $n$  placé, à vue et dans le plus grand éloignement possible  $nx$ , à la même distance que  $x$  de la droite donnée. C'est ainsi que les réseaux de parallèles équidistantes des fig. 29, 30 et 31 seront avantageusement tracés : en élevant, à vue, deux perpendiculaires aux extrémités de la base commune à

ces réseaux, et portant, sur ces perpendiculaires, des parties égales pour servir d'appui à la règle, dont on fera marquer la ligne de foi dans les seuls intervalles utiles auxdites figures.

La limite  $\frac{1^m}{10000}$  d'exactitude graphique, § 7 page 2, suggère un moyen de tracer, avec la règle seule, des droites parallèles dans une étendue indiquée.

En effet, deux droites  $cn$ ,  $xy$  (fig. 32) qui concourent en  $n$ , sont regardées comme graphiquement parallèles dans l'espace  $cnyx$  : lorsque la parallèle exacte  $yt$ , conduite à l'une d'elles  $nc$  par l'extrémité  $y$  de l'autre, s'écarte de celle-ci d'une quantité graphiquement inappréciable, ou moindre que

$\frac{1^m}{10000}$ . Or, on a  $\frac{nx}{xc} = \frac{yx}{xt}$  ; et, en supposant  $tx < \frac{1^m}{10000}$ , il vient :  $nx > xc \times \frac{yx}{xt} \times \frac{10000}{1^m}$ ,  $\frac{nx}{1^m} > \frac{xc}{1^m} \times \frac{yx}{1^m} \times 10000$

et  $\frac{nx}{1^m} > \frac{xc}{0^m,01} \times \frac{yx}{0^m,01}$ . Donc, le point  $n$ , sur lequel il faudra diriger une règle, passant successivement par  $c$  et par  $x$ , pour en rendre les traces  $cn$ ,  $xy$  graphiquement parallèles, sera éloigné de la feuille  $cnyx$ , d'autant de mètres, au moins, que l'indique le nombre  $\frac{xc}{0^m,01} \times \frac{yx}{0^m,01}$ .

88. Une ÉQUERRE, ou plaque terminée par deux règles  $pb$ ,  $bb'$  perpendiculaires entre elles (fig. 34), sera juste : quand, retournée sur son côté  $bb'$ , les traces  $bp$ ,  $bx$  se prolongeront l'une par l'autre ; ou que, dans les deux positions adjacentes  $b'bp$ ,  $b'bx$  de l'équerre sur la ligne  $px$ , le côté  $bb'$  de l'angle  $xbb'$  coïncidera avec le côté  $bb'$  de l'angle  $pbb'$ .

On improvise une équerre : avec une règle en papier  $prq$  (fig. 34), que l'on plie en travers  $bb'$  de sa ligne de foi  $pq$ , de manière à coucher une partie  $bp$  de cette ligne sur l'autre  $bq$ .

#### Le Compas.

89. Le COMPAS, fait de deux branches pointues qui peuvent s'approcher à volonté, sert à intercepter les distances graphiques.

Les branches d'un *petit compas* sont assez bien assemblées par un pivot, qu'un bouton de vis rend plus ou moins doux.

Mais les pointes du *grand compas*, destiné au transport des longueurs qui dépassent *deux décimètres*, doivent glisser sur une tige à laquelle on puisse les fixer. On forme ce compas, désigné par *Compas-à-verge*, avec une règle LR (fig. 44) et deux pointes  $\pi$ ,  $\pi'$  : l'une  $\pi'$  fixée à cette règle, l'autre  $\pi$  tenant à une coulisse mobile.

Quand une petite longueur  $cd$  (fig. 30) sera inaccessible au compas : on l'estimera, ou on la piquera, en la regardant comme différence de deux longueurs  $dx$ ,  $ex$  accessibles aux pointes.

90. Au lieu de recourir à un limbe particulier, pour évaluer la distance des pointes du compas-à-verge, ou pour donner à ces pointes un écartement désigné : on trace, avec avantage, le limbe sur la verge même LR (fig. 44); mais alors, il faut en déterminer la graduation-origine, c'est-à-dire, celle que couvrirait l'index  $o$  de la pointe mobile  $\pi$ , si cette pointe coïncidait avec la pointe fixe  $\pi'$ .

À cet effet, on estimera, avec un autre compas, le nombre  $n$  des parties du limbe LR contenues sur une longueur  $ab$  (fig. 44); puis on interceptera cette distance par les pointes du compas-à-verge : soient  $g$  la graduation du limbe, alors désignée par l'index  $o$  de la pointe mobile  $\pi$ , et  $x$  celle que marquerait le même index, si on pouvait placer la pointe  $\pi$  sur  $\pi'$ ; on aura :  $n = g - x$  et  $x = (g - n)$ .

En sorte que toute longueur sera, désormais, mesurée avec le *compas à verge-graduée* : en retranchant la graduation constante  $x$  ou  $(g - n)$ , de la graduation fournie par l'index  $o$  de la coulisse; et réciproquement, l'écartement des pointes comprendra telle distance  $d$ , en plaçant l'index de la coulisse sur la graduation  $d + (g - n)$ .

L'adjonction d'un vernier à l'index  $o$ , § 108 page 62, favorisera l'exactitude de ces mesures.

91. Un assemblage variable de chacune des pointes, ou

seulement de l'une d'elles, sur son montant, permettra de régler la pointe  $\pi'$  à la graduation zéro. Il suffira, pour cela, d'arrêter l'index  $o$  de la pointe mobile  $\pi$  (fig. 44) sur la graduation  $n$  d'une longueur connue  $ab$ , qu'on interceptera ensuite, par les pointes  $\pi$ ,  $\pi'$ : au moyen des mouvements particuliers de ces pointes sur leurs montants. C'est, ordinairement, à la seule pointe  $\pi'$  qu'on fait subir cette modification: en l'attachant aussi à une coulisse, que l'on presse sur la verge  $LR$  dès que la distance  $ab$  a été interceptée.

La graduation, marquée par l'index  $o$  de la pointe mobile  $\pi$ , mesurera alors toute longueur comprise par les pointes: tant que l'assemblage de ces pointes, sur leurs montants, restera tel qu'il vient d'être réglé.

### *Le Rapporteur circulaire.*

92. Le Rapporteur circulaire, ou RAPPORTEUR proprement dit, destiné à mesurer et à tracer les angles sur le papier, se forme d'une plaque mince contenant un limbe  $L$ , que l'on a réduit à un demi-cercle en écrivant sur chaque point de division les graduations des deux extrémités du diamètre correspondant (fig. 53, 54); ce qui produit deux demi-limbes *soustractivement supplémentaires*, dont on conserve le contre en donnant à leur diamètre une marge  $ACB$ , terminée en ligne droite pour servir de règle.

Le sens de numération du limbe, vu par sa partie concave, pouvant être pareil ou inverse à celui des angles considérés; il y aura deux manières d'employer le rapporteur.

93. *Le rapporteur étant numéroté dans le sens des inclinaisons.* S'il s'agit de mesurer l'angle  $acd$  (fig. 55): on en couvrira le premier côté  $ca$  par le rayon zéro du rapporteur, qu'on fera, ensuite, glisser jusqu'à ce que, son centre coïncidant avec le sommet de l'angle, le second côté  $cd$  corresponde à la graduation cherchée  $g$ . Et pour mener, par un point  $p$ , une droite inclinée sur  $ca$  d'une quantité voulue  $g$ : ayant placé une règle sur le rayon  $g$  du limbe, on couvrira le côté de départ  $ca$  par le rayon zéro, qu'on fera glisser

jusqu'à ce que la règle passe par le point  $p$  ; et l'on tracera le second côté  $dg$ .

94. *Le rapporteur étant numéroté dans le sens inverse des inclinaisons.* Lorsqu'on devra estimer l'angle  $acd''$  (fig. 56) : on posera le rayon zéro sur le second côté  $cd''$ , pour lire la graduation cherchée sur le rayon qui coïncidera avec le premier côté  $ca$ . Et pour mener, par le point  $p$ , une droite inclinée sur  $ca$  de la quantité  $g$  : on placera, sur ce côté, le rayon  $g$  qu'on fera glisser jusqu'à ce que le point  $p$  soit couvert par le diamètre, dont on piquera les extrémités  $o$ ,  $200$  pour les joindre, ensuite, avec la règle  $ab$ .

On simplifiera, même, cette dernière partie de l'opération, quand la règle  $ab$  sera parallèle au diamètre ; puisqu'on pourra la placer aussitôt en position  $d''pb''$ .

95. La comparaison de ces deux méthodes fait généralement préférer la seconde, qui, sans poser de règle sur le limbe, trace plus immédiatement les inclinaisons. C'est pourquoi, nous prescrivons l'usage du rapporteur dont la numération aura un sens inverse à celui des angles ; et, pour remplir toujours cette condition, la plaque de l'instrument contiendra un limbe sur chacune de ses faces, et ces deux limbes seront numérotés en sens inverses l'un de l'autre ; ou, mieux encore, ladite plaque sera transparente, en corne par exemple, afin qu'un seul limbe présente, par le retournement de cette plaque, chacun des deux sens que l'on peut attribuer aux inclinaisons.

96. Les angles  $bkf$ ,  $dka$  étant égaux et de même sens (fig. 56), la direction indéfinie  $bd$  sera obtenue en mettant le rayon de la graduation dans le sens  $kf$  ou dans le sens  $ka$ . Et dès-lors, pour tracer une droite  $db$  inclinée sur  $af$  d'une quantité désignée  $g$  et passant par un point  $p$  : on posera sur  $af$  le rayon  $g$ , dans quelque sens qu'il se présente, et on le fera glisser jusqu'à ce que la règle  $ab$ , supposée parallèle au rayon zéro, passe par le point  $p$ . On estimera, aussi, l'inclinaison d'une ligne  $db$  sur  $af$  : en appuyant la règle du rapporteur sur  $db$  de manière que  $af$  devienne rayon du

limbe ; et l'une des graduations correspondantes sera propre à l'inclinaison cherchée, tandis que l'autre appartiendra à son prolongement.

97. Quand le mouvement du rapporteur, sur le côté  $ae$  de l'angle considéré (fig. 56), ne pourra s'étendre assez pour que l'un des rayons du limbe § 93, ou la règle  $ab$  § 94, atteigne l'autre côté  $drb$  ; on recourra à une sécante  $gf$ , relativement à laquelle on mesurera l'inclinaison  $gae$  du côté de départ  $ae$  ; et l'on retranchera cette inclinaison de celle  $qkb$  de l'autre côté  $db$ , s'il faut apprécier l'inclinaison de  $db$  sur  $ae$  ; tandis qu'on ajoutera ladite inclinaison  $gae$  à la graduation  $g'$ , et l'on tracera, par le point  $r$ , la direction  $db$  inclinée sur  $gf$  de la quantité  $(gae + g')$ , lorsqu'on voudra faire avec  $ae$  l'angle  $g'$  ou  $[(gae + g') - gae]$ , § 51 page 22.

98. Si la marge, ou règle  $ab$ , n'est pas parallèle au rayon zéro (fig. 54) ; l'usage du rapporteur, tel que nous l'avons précédemment indiqué § 96, introduira dans chacune des inclinaisons, tracées ou mesurées, une erreur égale à l'angle de  $ab$  avec le rayon zéro. Mais cette *erreur de marge* disparaîtra : en jugeant chaque angle par la différence des inclinaisons, uniformément altérées, de ses côtés sur une direction auxiliaire quelconque  $x'x'$  (fig. 58), comme on vient de le pratiquer. Et, pour reconnaître cette direction auxiliaire : on la terminera par deux fers de flèche, dont les pointes opposées rappellent qu'il est indifférent de coucher le rayon  $ca'$  dans un sens ou dans l'autre sur  $x'x'$ , pour relever ou tracer la droite  $av$ , § 96.

99. Le rapporteur sert à décrire un segment capable par points ; car, soit proposé d'appuyer sur  $dg$  (fig. 25) le segment capable de l'angle  $z$  donné numériquement : on regardera cet angle comme la différence des inclinaisons  $(z + x)$  et  $x$  de ses côtés sur une direction auxiliaire  $gf$  ; et toutes les valeurs, successivement données à la graduation arbitraire  $x$ , produiront des sommets  $t, t', t'', \dots$  d'angles  $z$  s'appuyant sur  $dg$ , lesquels sommets seront d'autant plus voisins que les valeurs de  $x$  différeront moins entre elles.

Le sens de numération du limbe indiquera celui des deux points  $d$  et  $g$ , par lequel on devra conduire l'inclinaison  $\alpha$ . ainsi, le limbe étant numéroté de gauche à droite, l'inclinaison  $z$  des deux droites  $dt$ ,  $gt$  se formera de droite à gauche, § 94; et, dans la recherche du segment en deçà de  $dg$ , § 79, ce sera par le point de droite  $d$  qu'on tirera l'inclinaison  $\alpha$ , tandis que la ligne inclinée de  $(z + \alpha)$ , sur la direction auxiliaire  $gf$ , passera par le point de gauche  $g$ . Si, même, on veut construire immédiatement les points de l'espace  $rvr''v'$ : il sera utile de choisir pour première graduation de  $\alpha$ , celle qui fournira à-peu-près  $dt'$ .

100. Lorsque l'angle  $z$  sera donné graphiquement en  $dzg$  (fig. 25): on décrira le segment capable sans recourir à la direction auxiliaire  $gf$ ; car il suffira d'estimer, avec le rapporteur, l'inclinaison de  $zg$  sur  $zd$ , pour que cette inclinaison successivement tracée, avec son erreur de marge, par le point  $g$  sur les lignes  $dt$ ,  $dt'$ ,  $dt''$ , etc., décalque l'angle donné  $dzg$  en  $dtg$ ,  $dt'g$ ,  $dt''g$ ,....

La théorie générale des goniomètres appliquée au rapporteur circulaire, § 220 à 226, complète avantageusement l'usage de cet instrument.

#### *Construction des Échelles.*

101. Une échelle graphique est le tableau des multiples, entiers et fractionnaires, de l'unité de mesure réduite à l'échelle, § 10, page 3. Ces multiples suivant ordinairement l'ordre ternaire décimal; le tableau-échelle présentera les unités, dizaines et centaines de sa plus petite subdivision, qui doit peu différer de la longueur *négligeable* dans la description correspondante.

Toutes les parties constitutives d'une échelle graphique se déduisent, successivement, du centuple de son plus petit élément; et l'on en pratique la construction de la manière suivante.

L'unité de mesure  $L$  étant ordinairement partagée en subdivisions plus ou moins détaillées; on l'exprimera en fonction



de sa plus grande partie aliquote  $k$  contenue dans l'emplacement destiné à l'échelle, soit  $L = \Delta k$ ; alors  $\frac{L}{M}$  ou  $l$  devient  $\frac{\Delta k}{M}$ ,  $10l = \frac{10\Delta k}{M}$ ,  $\frac{l}{10} = \frac{\Delta k}{10M}$ ; et, selon que  $10l$ ,  $l$  ou  $\frac{l}{10}$  sera presque négligeable, on aura à déterminer directement  $1000l = \frac{1000\Delta}{M}k$ ,  $100l = \frac{100\Delta}{M}k$ , ou  $10l = \frac{10\Delta}{M}k$  par une quatrième proportionnelle, dont les termes seront d'autant plus simples que  $M$  aura davantage de facteurs communs avec  $\Delta$ , 1000, 100 ou 10. Ainsi, en supposant  $F$  plus grand facteur commun entre  $M$  et  $\Delta$ , c'est-à-dire,  $M = Fm$ ;  $\Delta = Fa$ :  $l$  deviendra  $\frac{a}{m}k$ ,  $10l = \frac{10a}{m}k$ ,  $100l = \frac{100a}{m}k$ ,  $1000l = \frac{1000a}{m}k$ ; et, quand le nombre  $m$  sera un multiple  $m'$  de 10,  $10l$  se simplifiera en  $\frac{a}{m'}k$ ,  $100l$  en  $\frac{10a}{m'}k$ ,  $1000l$  en  $\frac{100a}{m'}k$ .

Occupons-nous, par exemple, de l'échelle qui doit contenir les dixièmes de l'unité, et dont l'ordre ternaire se composera de dixaines, unités et dixièmes.

$10l$  valant  $\frac{10a}{m}k$ , je prends  $ax$  égale à la partie aliquote  $k$  (fig. 29), sur la direction quelconque  $av$  je porte  $m$  fois de suite la longueur arbitraire  $p$ , et, par le point  $y$  tel que  $ay = 10ap$ , je tire  $yo$  parallèle à  $ax$ : la longueur  $oy$  vaudra  $\frac{10a}{m}k$ , ou  $10l$ , que je porte bout-à-bout sur  $ox$ , autant que possible, en plaçant les numéros 10, 20, 30, .... aux points ainsi obtenus.

Pour trouver  $l$ : je trace, du même côté de  $ax$ , dix parallèles équidistantes, et, avec un point  $d$  de la ligne extrême de ce réseau, je forme le triangle  $odn$  qui interceptera, sur les parallèles équidistantes, les longueurs successives  $l$ ,  $2l$ ,  $3l$ ,  $4l$ ,  $5l$ ,  $6l$ ,  $7l$ ,  $8l$  et  $9l$ .

Je partage, maintenant, la dixaine  $oy$  en ses dix unités: en transportant bout-à-bout la partie  $l$  quand elle sera facile à saisir; autrement, je marquerai les points de division, en

considérant chaque petit intervalle  $l$  comme la différence de deux longueurs commodes à rapporter : ce qui consistera à placer, alternativement de  $o$  en  $8$  et de  $8$  en  $o$ , chacune des longueurs  $9l$ ,  $8l$ ,  $7l$ ,  $6l$  et  $5l$  fournies par le triangle  $odn$  ; comme on le voit en  $o''n''$ .

Quant aux dernières parties  $\frac{l}{10}$  ; elles résulteront du triangle  $ocd$  qui , ayant pour base  $cd = l$ , interceptera, sur le réseau primitif, les éléments  $\frac{l}{10}$ ,  $\frac{2l}{10}$ ,  $\frac{3l}{10}$ , .... Et, si l'on fait, de ce triangle, une *languette* mobile : on estimera l'intervalle, qui sépare un point quelconque  $r$  de la division voisine n.º 4, en y insérant cette languette  $o'c'd'$  jusqu'à coïncidence de  $r4$  avec une parallèle, dont le n.º 0,7 indiquera la longueur.

On conservera le nom de l'unité de mesure adoptée : en l'écrivant contre le point *zéro*, origine commune des unités du 1.º, 2.º et 3.º ordre.

102. En remarquant : 1.º que le prolongement indéfini des parallèles équidistantes (*fig. 29*) fera désigner à la pointe  $o'$  de la languette  $o'c'd'$ , le n.º 0,7 qui mesure l'intervalle  $r4$ . 2.º Que le tracé des transversales parallèles à  $co$ , par les n.ºs 1, 2 et 3... des unités du second ordre de l'échelle, procurera au côté  $o'c'$  de la languette, des appuis qui conserveront toutes les positions de la base  $c'd'$  parallèles à  $ax$ , et  $o'r' = ro$ . 3.º Que les transversales parallèles à  $od$  par les n.ºs 10, 20, 30... des unités du 3.º ordre de l'échelle, transporteront ces unités sur toutes les parallèles du réseau. Il résultera de ces dispositions : que les unités, dizaines et centaines de la plus petite partie de l'échelle graphique seront assemblées, de manière à donner une distance graphique ou numérique par une seule ouverture du compas.

S'agira-t-il, en effet, de connaître la longueur graphique homologue à une distance numériquement désignée ? on placera le compas sur la parallèle à  $xo$  passant par le numéro des unités du 1.º ordre, ici des dixièmes : une pointe étant

sur la transversale des unités du 3.<sup>e</sup> ordre, ici des dizaines, et l'autre pointe sur la transversale des unités du 2.<sup>e</sup> ordre.

Et, si l'on veut estimer la dimension naturelle correspondante à une distance graphique: on portera, parallèlement à  $x_0$ , l'ouverture de compas qui comprend cette distance, de manière que, une pointe parcourant une transversale du 3.<sup>e</sup> ordre, ici des dizaines, l'autre pointe rencontre une transversale du 2.<sup>e</sup> ordre; ces pointes indiqueront alors les dizaines et les unités, tandis que les dixièmes seront donnés par le numéro de la parallèle du réseau, sur laquelle posera le compas.

103. Construire l'échelle  $\frac{1}{250}$  dans un emplacement de 11 à 12 centimètres, en adoptant le mètre pour unité de mesure.

Le *décimètre* étant la plus grande partie aliquote du mètre contenue dans l'emplacement désigné; l'unité graphique  $\frac{L}{M}$

vaudra  $\frac{10k}{250}$  ou  $\frac{0,1}{25}$  qui est assez considérable pour que, dans une description régulière, les dixièmes en soient marqués sur l'échelle, dont l'ordre ternaire comprendra, alors, les dizaines, unités et dixièmes du mètre.

Cherchons  $10l = \frac{10}{25}k = \frac{2}{5}k$ ; en portant (fig. 29) un décimètre de  $n$  en  $x$ , et, sur la ligne quelconque  $xy$ , 5 fois une partie arbitraire  $p$ ; par le point  $y$ , tel que  $xy = 2p$ , tirons  $yo$  parallèle à  $vx$ , et  $yo$  vaudra  $\frac{2}{5}k$  ou  $10l$ .

Après avoir tracé parallèlement à  $yx$ , les lignes équidistantes du réseau de l'échelle, § 87; on portera, à droite de  $o$ , la longueur  $10l$  autant de fois qu'elle pourra être contenue sur  $ox$ , pour mener des transversales parallèles entre elles, par les points  $0, 10, 20, \dots$ ; on tirera la diagonale  $d_{10}$ , qui déterminera les longueurs  $l, 2l, 3l, \dots$ , dont on se servira pour marquer, de  $o$  en  $n$ , les points de division  $1, 2, 3, \dots, 9$ ; on fera  $dc = l$ , et la nouvelle transversale  $oc$  procurera  $\frac{l}{10}, \frac{2l}{10}, \frac{3l}{10}, \dots$ ; enfin, les parallèles à  $co$ , conduites par les points  $1, 2, 3, \dots, 9$ ,

termineront l'échelle dont les numéros seront écrits : de deux-en-deux, ou de trois-en-trois, sur les prolongements des lignes qu'ils doivent désigner. Le mot *mètre*, placé à côté de l'origine  $o$ , rappellera l'unité de mesure employée.

On voit qu'il suffira de donner à cette échelle l'ordre ternaire des centaines, dixaines et unités, pour qu'elle devienne celle du  $\frac{1}{2500}$ ; ce qui consistera à remplacer les numéros

10, 20... par 100, 200...; à écrire 10, 20, 30... 90, au lieu de 1, 2, 3... 9, et enfin 1, 2, 3... à la place de 0,1, 0,2, 0,3...

Lorsque les millimètres seront marqués sur le décimètre employé, on portera immédiatement  $on = 10l = 40$  millim. et  $cd = l = 4$  millimètres.

104. Construire l'échelle  $\frac{1}{10000}$ , dans un emplacement de 6 centimètres, le mètre étant l'unité de mesure.

La plus grande partie aliquote  $k$  est ici le *demi-décimètre*,  $l$  vaudra  $\frac{20k}{10000}$  ou  $\frac{k}{500}$ ,  $10l = \frac{k}{50}$ ,  $100l = \frac{k}{5}$ ; et l'ordre ternaire de l'échelle comprendra les centaines, dixaines et unités de mètre.

Pour obtenir  $100l$  : après avoir tracé le réseau décimal de l'échelle (fig. 30), je prends  $ax = k = \frac{1}{2}$  décimètre; sur  $av$  je porte 5 fois une partie quelconque  $p$ , et, par le point  $y$  tel que  $yv = p$ , je mène  $yt$  parallèle à  $vx$  :  $tx$  vaudra  $\frac{k}{5}$  ou  $100l$  que je porte de  $v$  en  $x$  autant qu'il se pourra, pour déterminer sur  $on$ , par des transversales parallèles, les points 0, 100, 200, 300,...; tirant ensuite  $nx$ , j'aurai  $10l$ ,  $20l$ ,  $30l$ ....

La dixaine étant trop petite pour être isolément transportée; j'en marquerai les places sur les deux parallèles extrêmes du réseau, au moyen des longueurs 110, 120, 130, etc., portées à gauche de la transversale n.° 100, lesquelles longueurs résulteront du trapèze  $axgh$ ; puis je tracerai  $co$  et ses neuf parallèles ayant pour numéros 10, 20, 30.... 90, écrits seulement de trois en trois, pour éviter la confusion; le pe-

tit triangle *cod* fournira, d'ailleurs, les unités qu'il suffira de numérotter de deux en deux.

Cette échelle deviendra celle du  $\frac{1}{1000}$  : en lui donnant pour ordre ternaire les dixaines, unités et dixièmes du mètre. Elle est aussi l'échelle générale dont nous avons montré l'avantage pour les descriptions régulières, § 10 page 4.

Si le demi-décimètre, porté de *n* en *x*, était subdivisé en millimètres, on prendrait aussitôt  $100\,l = 10$  millimètres et  $10\,l = cd = 1$  millimètre.

105. Quand les subdivisions ordinaires de l'unité de mesure ne suivront pas l'ordre décimal, il sera souvent utile que l'échelle graphique reproduise nominativement ces subdivisions, en adoptant l'ordre ternaire qui existe entre elles. Ainsi, une échelle de dixmes, ayant la toise pour unité, n'énoncera pas les longueurs en *pieds* ni *pouces* ; et, pour donner cette nomenclature à l'échelle, il faudra en subordonner la construction aux sous-multiples ordinaires de la toise.

Alors, une échelle, ayant des dixaines de toise pour unités du 3.<sup>e</sup> ordre, descendra jusqu'aux *pieds* comme unités du 1.<sup>er</sup> ordre ; tandis que, si elle doit avoir des *toises* pour plus hautes unités, elle descendra jusqu'aux *pouces* par les diviseurs 6 et 12.

Soit proposé, pour exemple, de construire, dans un emplacement de cinq pouces, l'échelle  $\frac{1}{100}$  en subdivisions ordinaires de la toise comme unité de mesure.

L'ordre ternaire sera composé de *toises*, *pieds* et *pouces*, et l'échelle contiendra  $l$ ,  $\frac{l}{6}$ ,  $\frac{l}{72}$ . La plus grande partie aliquote *k* étant 4 pouces,  $\frac{l}{m}$  ou *l* vaudra  $\frac{18}{100}k = \frac{9}{50}k$  ; et, pour l'obtenir : sur *ax* égalant 4 pouces (fig. 31), j'élève deux parallèles *xv*, *xy*, l'une *xy* contenant 9 fois une partie arbitraire *p*, l'autre *xv* contenant (50—9) ou 41 fois la même partie ; tirant *yv*, le point *a* déterminera

$bo = \frac{by \times bx}{xv + by} = \frac{9}{50}k = l$  que je porte sur  $ox$ , autant que possible, en écrivant les n.<sup>os</sup> 1, 2, 3, ... aux points de division.

Ayant donné au réseau de l'échelle, autant de zones que l'unité du 2.<sup>e</sup> ordre renferme d'unités du 1.<sup>er</sup>, c'est-à-dire *douze* : je tracerai aussitôt les transversales du 3.<sup>e</sup> ordre, et par le point  $n$ , qui termine la *sixième* zone, je tirerai la diagonale  $na$  interceptant les longueurs successives  $\frac{l}{6}$ ,  $\frac{2l}{6}$ ,  $\frac{3l}{6}$ ,  $\frac{4l}{6}$ ,  $\frac{5l}{6}$  que j'emploierai à marquer les unités du 2.<sup>e</sup> ordre ou *pieds*, de  $o$  en  $a$ . Prenant ensuite  $cd = \frac{l}{6}$  : les parallèles à  $co$ , nienées par les numéros du 2.<sup>e</sup> ordre, achèveront le tableau-échelle.

On écrira le mot *toise* à côté du zéro ; une accolade, portant le mot *pieds*, embrassera les 5 unités du 2.<sup>e</sup> ordre ; tandis qu'une autre accolade comprendra les *pouces*, ou unités du 1.<sup>er</sup> ordre.

Lorsqu'on sera *obligé* d'employer la toise et ses subdivisions pour mesurer les longueurs : on composera une échelle graphique générale des descriptions régulières, avec les multiples du *point*, lequel valant  $\frac{1^{lig.}}{12} = \frac{1^{po.}}{144} = \frac{1^{pl.}}{1728} = \frac{1^l}{10368}$ , ou  $\frac{1^{millim.}}{6}$ , sera regardé comme graphiquement négligeable ;

en sorte que l'unité de longueur deviendra  $\frac{M^l}{10368}$ .

### Le Vernier.

106. Quand on veut porter sur le papier des distances ou des angles donnés en nombres, ou bien, estimer numériquement des longueurs ou des angles tracés, on les compare à un limbe rectiligne ou circulaire ; et l'on apprécie les fractions des dernières parties de ce limbe, au moyen d'une échelle mobile qui porte le nom de son inventeur, le géomètre français VERNIER.

L'usage du vernier s'appuie sur les considérations suivantes :

Si l'on subdivise différemment deux lignes, de pareille courbure et de même longueur : les divisions de l'une pourront servir à estimer les fractions des parties de l'autre.

En effet, soient  $L$  et  $v$  ces deux longueurs (*fig. 39* et *40*), dont l'une  $v$  a été divisée en  $n$ , tandis que l'autre  $L$  a été partagée en  $(n \mp k)$ ; ou  $v = np'$  et  $L = (n \mp k)p$ , on a :

$$np' = (n \mp k)p$$

d'où l'on déduit :  $p' = p \mp \frac{kp}{n}$

$$2p' = 2p \mp 2\frac{kp}{n}$$

$$3p' = 3p \mp 3\frac{kp}{n}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$xp' = xp \mp x\frac{kp}{n}$$

signifiant que : si les deux longueurs égales  $L$  et  $v$  sont en coïncidence, la première graduation de l'une sera distante de la première graduation de l'autre, de la quantité  $\mp \frac{kp}{n}$ ; la réunion des deux premières parties de  $v$  différera de la somme des deux premières parties de  $L$ , de la quantité  $\mp 2\frac{kp}{n}$ , et ainsi de suite; enfin, la réunion des  $x$  premières parties de  $v$  différera de la somme des  $x$  premières parties de  $L$ , de la quantité  $\mp x\frac{kp}{n}$ . Ainsi, quand les origines de  $L$  et  $v$  coïncideront : le numéro  $x$  de  $v$  sera distant du numéro  $x$  de  $L$ , de la quantité  $\mp x\frac{kp}{n}$ ; savoir :  $-x\frac{kp}{n}$ , ou en arrière, lorsque (*fig. 39*)  $L = (n - k)p$  : et  $+x\frac{kp}{n}$ , ou en avant, lorsque (*fig. 40*)  $L = (n + k)p$ . Si donc, on fait mouvoir la ligne  $v$  jusqu'à ce que son numéro  $x$  coïncide avec le numéro  $x$  de  $L$  : l'origine de  $v$  se trouvera distante de l'origine de  $L$ , de la

quantité  $\pm x \frac{kp}{n}$ , c'est-à-dire : sera en avance (fig. 41) ou en arrière (fig. 42) sur cette dernière, de  $x \frac{kp}{n}$ , selon que l vaudra  $(n - k) p$  ou  $(n + k) p$ .

Cela posé, imaginons un limbe, ou ligne indéfinie divisée en parties égales à  $p$  (fig. 43), et concevons qu'une longueur  $v$ , comprenant  $(n \mp k)$  de ces parties, ait été divisée en  $n$ , tellement que  $(n \mp k) p = np'$ ; on aura  $x p' = x p \mp x \frac{kp}{n}$ . Supposons un point  $y$  déterminant sur le limbe une fraction de  $ab$ , ou de  $p$ , qu'il s'agisse d'évaluer.

Soit 1.<sup>o</sup>  $np' = (n - k) p$ : nous considérerons la graduation  $a$  comme l'origine d'une longueur  $al$  comprenant  $(n - k) p$ ; nous poserons la longueur  $v$  de manière que son origine, ou *zéro*, couvre le point  $y$ , et nous remarquerons le numéro  $x$  de  $v$  qui coïncidera avec une ligne de division du limbe; en sorte que l'avance de  $y$  sur  $a$ , ou la distance  $ay$ , sera égale à  $x \frac{kp}{n}$ , et la place du point  $y$  aura pour graduation  $\left(a + x \frac{kp}{n}\right)$ .

Si 2.<sup>o</sup>  $np' = (n + k) p$ : on regardera le point  $b$  comme l'origine d'une longueur  $bl'$  comprenant  $(n + k) p$ ; et la distance  $by$ , dont  $y$  est en arrière de  $b$ , sera représentée par  $x' \frac{kp}{n}$ ,  $x'$  étant le numéro de  $v$  coïncidant avec une ligne de division du limbe, et la graduation du point  $y$  sera  $\left(b - x' \frac{kp}{n}\right)$ .

Le vernier  $v$  remplit évidemment le rôle de la languette mobile employée, § 101 page 54, pour estimer les plus petites parties d'une échelle.

On distinguera donc deux sortes de verniers : l'un *additif*, provenant de la division, en  $n$ , de  $(n - k)$  parties du limbe, et l'autre *soustractif*, résultant de la division, en  $n$ , de  $(n + k)$  de ces parties. Il est facile de voir pourquoi e vernier additif est préféré à l'autre.

107. Le vernier, obtenu par la division, en  $n$ , de  $(n \mp k)$



parties du limbe et qui a pour longueur  $(n \mp k) p$ , peut se réduire à la longueur  $\left(\frac{n}{k} \mp 1\right) p$ , sans changer sa partie  $p'$ .

Car, de  $np = (n \mp k) p$ , on tire  $\frac{n}{k} p' = \left(\frac{n}{k} \mp 1\right) p$  ;  
 et, en remplaçant  $\frac{n}{k}$  par  $n'$ , il viendra :  $p' = p \mp \frac{p}{n}$ ,  
 $xp' = xp \mp x \frac{p}{n}$ , d'où résultent évidemment les conclusions  
 précédentes.

On pourra donc, en définitive, considérer le vernier comme provenant de la division, en  $n$ , de  $(n-1)$  parties du limbe ; et en exposer la théorie de la manière suivante :

108. Le vernier simple se forme en divisant, en  $n$ , une longueur  $L$  comprenant  $(n-1)$  parties d'un limbe droit ou circulaire : de sorte que, si l'on désigne par  $p$  la longueur de la plus petite subdivision de ce limbe, et par  $p'$  une partie du vernier  $v$ , on aura :

$$v = np' = (n-1) p$$

$$\text{d'où : } p' = p - \frac{p}{n}$$

$$2p' = 2p - 2\frac{p}{n}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$xp' = xp - x\frac{p}{n}$$

Et, si l'on fait coïncider l'origine, ou *zéro*, du vernier avec une ligne de division du limbe (fig. 39), l'étendue de ce vernier comprendra  $(n-1)$  parties du limbe et sa graduation n.<sup>o</sup> 1, sera en arrière d'une division du limbe, de la quantité  $\frac{p}{n}$  ; le n.<sup>o</sup> 2 du vernier sera en arrière d'une division du limbe, de  $2\frac{p}{n}$  ..... ; enfin, le numéro  $x$  du vernier sera en arrière d'une division du limbe, de  $x\frac{p}{n}$  : en avançant donc cette ligne de division n.<sup>o</sup>  $x$ , de manière qu'elle coïncide avec la di-

vision voisine du limbe (*fig. 41*), le zéro du vernier aura aussi marché de  $x \frac{p}{n}$ . D'où l'on conclura l'avance de ce zéro sur la précédente division du limbe : en cherchant le numéro de la graduation du vernier qui coïncidera avec un point de division du limbe, et multipliant ce numéro par  $\frac{p}{n}$ .

Le vernier s'adapte à un limbe droit ou circulaire : au moyen d'une coulisse qu'arrête une vis de pression *s* (*fig. 44* ou *45*) ; et c'est par une vis de rappel *r* qu'on imprime de très petits mouvements à ce vernier.

109. Soit proposé, pour exemple, de trouver la longueur de la droite *ab* (*fig. 44*), en parties du limbe *LA* : on place, sur l'origine des graduations du limbe une pointe du compas interceptant *ab*, et on fait glisser le vernier sur le limbe jusqu'à ce que son zéro coïncide avec la seconde pointe du compas. Le nombre des parties entières de *LA* est indiqué par le numéro de la graduation qui précède immédiatement le zéro du vernier ; et la fraction de subdivision est donnée au moyen du numéro du vernier qui coïncide avec un point de division du limbe.

Si donc, le zéro du vernier dépasse la 19.<sup>e</sup> graduation du limbe, que ce vernier soit divisé en 4 parties, et que son n.<sup>o</sup> 1 coïncide avec une division du limbe : la distance *ab* égalera  $19p + \frac{1}{4}p$ .

Réciproquement, pour obtenir une ouverture de compas égale à  $24p + \frac{3}{4}p$  : on fixera le zéro du vernier en avance de la 24.<sup>e</sup> graduation du limbe, de manière à faire coïncider le n.<sup>o</sup> 3 de ce vernier avec une division du limbe.

Quand on aura à estimer l'angle *c* (*fig. 45*) : on tracera, avec le rayon *L'c* du limbe *L'A'*, l'arc qui le mesure ; et l'on appréciera la longueur ou la graduation de cet arc, comme nous venons de l'indiquer pour une ligne droite.

110. Si aucune des lignes de division du vernier ne coïncide avec une graduation du limbe : on rencontrera une

partie du limbe comprenant deux lignes du vernier; et, en supposant que le milieu de cette partie du limbe se confonde avec le milieu de la partie correspondante du vernier, l'erreur encourue n'excédera pas  $\frac{p}{2n}$ , car  $\frac{p}{2} - \frac{p'}{2} = \frac{p}{2n}$ . De sorte qu'on ajoutera  $\frac{p}{2n}$  à l'indication donnée par le moindre des deux numéros du vernier, compris dans la même partie du limbe. Ce qui fait dire que l'incertitude de lecture due à un vernier ne dépasse pas la quantité  $\frac{p}{2n}$ .

Ce cas arrive à la figure 45, où les numéros 2 et 3 du vernier tombent dans une seule division du limbe.

111. *Applications.* Construire un vernier simple qui fasse estimer le tiers d'un millimètre, sur un limbe droit partagé en demi-centimètres.

$p=5$ , <sup>millim.</sup> $\frac{p}{2n} = \frac{1}{3}$ ; d'où <sup>centim.</sup> $n=7,5$ . En prenant  $n=8$ , longueur du vernier  $= 7p = 35$ , que l'on divisera en 8.

Quelle sera la plus petite graduation d'un limbe circulaire, et la longueur du vernier contenant 15 parties, pour que l'incertitude de lecture ne dépasse pas le double-centigrade?  $\frac{p}{2n} = 0^s, 02$ ,  $n=15$ ; donc  $p=0^s, 60$  réduit à  $0^s, 50$ ,  $v=14p=7^s$ .

Un limbe circulaire étant divisé en doubles-grades, et le vernier simple contenant 24 parties: trouver les numéros du vernier et du limbe, qui devront coïncider pour marquer la graduation  $133^s, 79$ .

$p=2^s$ ,  $n=24$ ;  $133^s, 79 = 66p + 1^s, 79$ : le zéro du vernier étant, d'abord, sur le n.° 66 du limbe, il restera à former  $1^s, 79 = x \frac{p}{n}$ ; on tirera  $x=21,48$  ou 21,5. Ainsi, on mettra les n.° 21 et 22 du vernier dans l'intervalle des graduations 87 et 88 du limbe: de manière que le n.° 21 du vernier dépasse le n.° 87 du limbe, autant que le n.° 88 du limbe dépassera le 22.° du vernier.

112. Le rayon est le développement de l'arc d'environ

64 grades, § 54 page 25,  $\Delta$  étant un arc de rayon  $R$ ,  $G'$  sa graduation en centigrades : on a  $\frac{R}{\Delta} = \frac{6400}{G}$ , et, si  $\Delta$  représente la plus petite division d'un limbe circulaire, que  $t'$  soit l'approximation due au vernier simple de  $n$  parties ou  $\frac{G}{2n} = t'$  : on aura  $R = \frac{6400\Delta}{2nt} = \frac{3200\Delta}{nt}$  ; et, réciproquement, étant donnés  $n$ ,  $t'$  et  $n$  : on trouvera  $\Delta$ , et  $G' = 2nt'$ .

Supposons que le millimètre soit la division la plus tenue d'un limbe : le limbe circulaire, dont le vernier de 10 parties fera estimer 2 centigrades et demi, aura pour rayon  $R = \frac{3200 \text{ millim.}}{25} = 0,128$ . L'arc  $G'$  ou  $2nt'$ , correspondant au millimètre, vaudra 50 centigrades.

*Moyens de copier les dessins dans des proportions données.*

113. La transformation d'une épure en une autre de dimensions différentes, c'est-à-dire, par changement d'échelle, consiste à tracer, dans une proportion voulue, une figure plane semblable à une autre. Or, soient  $\frac{1}{M}$  l'échelle de l'épure

donnée,  $\frac{1}{M'}$  celle de l'épure à construire,  $d$ ,  $d'$  les côtés homologues de ces épreuves et  $D$  la dimension naturelle que représentent ces côtés : on a  $D = Md$ ,  $D = M'd'$  et  $\frac{d}{d'} = \frac{M'}{M}$  ; en appelant  $s$  et  $s'$  les surfaces des épreuves, on a aussi :  $\left(\frac{d}{d'}\right)^2 = \frac{s}{s'} = \left(\frac{M'}{M}\right)^2$  ; l'un des trois rapports  $\frac{s}{s'}$ ,  $\frac{d}{d'}$ ,  $\frac{M}{M'}$  étant donc connu, on conclura les deux autres.

Cela posé, pour transformer la figure comprise dans le polygone  $ATRNQ$  (fig. 33), en une autre telle que le rapport des échelles soit donné : on partagera cette figure en triangles principaux  $ARN$ ,  $AQN$ ,  $ATR$ , qui pourront être subdivisés, par deux systèmes de parallèles, en parallélogrammes assez petits pour qu'on estime à vue les moitiés, tiers ou quarts de leurs côtés. On construira, ensuite, les triangles  $arn$ ,  $aqn$ ,  $atr$ ,

respectivement semblables aux précédents, par des ouvertures de compas déterminées au moyen de  $d' = d \left( \frac{m}{m'} \right)$ ; ce qui rendra le polygone  $atr n q$  semblable au cadre  $ATR NQ$ . On décomposera, ensuite, chaque nouveau triangle de la même manière que son homologue; après quoi, on copiera à vue, dans chacun des parallélogrammes élémentaires, les détails compris dans les parallélogrammes correspondants de la figure donnée.

La copie d'une épure est encore facilitée: en inscrivant cette épure dans un parallélogramme que l'on subdivise, ainsi que son transformé construit par deux triangles, en petits parallélogrammes par deux systèmes de parallèles. Et, lorsque l'un des parallélogrammes élémentaires  $p$  de l'original contiendra des détails très multipliés: on le partagera par ses diagonales, ainsi que son homologue  $d$  de la copie, en compartiments circonscrivant des détails plus commodes à copier.

Comme l'amplification d'une épure agrandit les erreurs de sa construction primitive, tandis que sa réduction rend les mêmes erreurs moins apparentes; on aura soin d'indiquer ces circonstances, en rappelant que la nouvelle figure à l'échelle  $\frac{1}{m'}$ , provient de la transformation d'une épure construite à l'échelle  $\frac{1}{m}$ .

Il est évident que les transformations par réduction pourront, seules, convenir aux descriptions régulières.

### L'Angle de transformation.

114. Les longueurs  $aq$ ,  $an...$  (*fig. 33*), qui servent à tracer les triangles  $anq$ ,  $arn...$ , semblables à leurs homologues  $ANQ$ ,  $ARN...$ , s'obtiennent immédiatement au moyen de

L'ANGLE DE TRANSFORMATION.

Pour construire cet angle: on porte, sur une droite  $pq$  (*fig. 34*), la plus grande dimension possible de la figure à

transformer; on élève, en direction quelconque,  $qr$  homologue à  $pq$  et égale à  $pq \times \frac{M}{M'}$ , puis l'on tire  $pr$ . Toutes les droites  $aa'$ ,  $bb'$ ,..... parallèles à  $qr$ , seront les transformées à l'échelle  $\frac{1}{M'}$  des longueurs respectives  $pa$ ,  $pb$ ,.....; puisque  $\frac{aa'}{ap} = \frac{bb'}{bp} = \dots = \frac{rq}{qp} = \frac{M}{M'}$  et que  $aa' = ap \frac{M}{M'}$ ,  $bb' = bp \frac{M}{M'}$ ... Ainsi en portant, de  $p$  en  $x$ , un côté de l'épure donnée, la ligne  $xx'$  sera le côté homologue de la copie.

Les parallèles  $aa'$ ,  $bb'$ ,....., tracées d'avance, faciliteront la direction à vue de  $xx'$ .

115. Quand les dimensions cherchées devront être moindres que les doubles-dimensions données, l'angle de transformation  $RPQ$  (fig. 35) pourra se tracer en décrivant un arc de rayon  $PQ = d$ , dont la corde  $QR$ , homologue à  $PQ$ , soit  $d' = d \left( \frac{M}{M'} \right)$ . Toute distance  $PX$  de la figure donnée, portée sur  $PQ$  et  $PR$ , fournira son homologue  $XX'$  de la copie; car

$$\frac{XX'}{PX} = \frac{QR}{QP} = \frac{M}{M'} \quad \text{et} \quad XX' = PX \left( \frac{M}{M'} \right).$$

Cette seconde manière de construire l'angle de transformation, correspond à l'usage du *Compas de proportion*.

### *Les Pantographes.*

116. La construction d'instruments, propres à tracer, d'un mouvement continu et dans une proportion voulue, la copie d'un dessin, est fondée sur le principe suivant :

Si, d'un centre  $p$  (fig. 46), on conduit des droites à tous les sommets d'un polygone  $ABCDE$ , et qu'on marque sur ces lignes, ou sur leurs prolongements, des points  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$ , tels que  $\frac{pA}{pa} = \frac{pB}{pb} = \frac{pC}{pc} = \frac{pD}{pd} = \frac{pE}{pe}$  : les figures  $ABCDE$ ,  $abcde$  seront semblables, et  $\frac{pA}{pa}$  sera le rapport de leurs côtés homologues.

117. Considérons deux longueurs parallèles  $bc$  et  $pa$  (fig. 47 ou 48); quelques inclinaisons que prennent simultanément ces parallèles, sur la droite qui joint l'extrémité  $a$  de l'une à l'extrémité  $b$  de l'autre, l'alignement  $cp$  des extrémités  $c$  et  $p$  passera toujours par le même point de la direction  $ab$ . Car, soit  $t$  la rencontre de  $cp$  avec  $ab$ , pour une inclinaison quelconque de  $cb$  et  $ap$  sur  $ab$ ;  $at$  sera déterminé par la relation :

$$\frac{at}{ab} = \frac{ap}{cb - ap} \text{ (fig. 47), ou } \frac{gt}{ab} = \frac{ap}{cb + ap} \text{ (fig. 48),}$$

laquelle, ne contenant rien de relatif à l'inclinaison des parallèles sur  $ab$ , se rapportera à toutes les positions simultanées de ces parallèles et déterminera, par conséquent, le point  $t$  d'une manière constante.

D'après cela, si on conçoit trois longueurs rigides et inextensibles  $ab$ ,  $bc$ ,  $ap$  assemblées aux points  $b$  et  $a$ , par des boulons ou charnières (fig. 47, 48) les trois points  $c$ ,  $t$ ,  $p$ , choisis primitivement en ligne droite, conserveront leur alignement, quelle que soit la position de  $ab$  relativement au système des parallèles  $bc$ ,  $ap$ .

De plus, les rapports  $\frac{ct}{tp}$ ,  $\frac{ct}{pc}$  et  $\frac{tp}{pc}$  seront, dans toutes les modifications du système des trois lignes  $ap$ ,  $bc$ ,  $tb$ , égaux à leurs homologues  $\frac{tb}{at}$ ,  $\frac{tb}{ab}$ ,  $\frac{at}{ab}$  et se déduiront, même, de ce dernier.

118. Pour astreindre les directions  $ap$ ,  $bc$  à un parallélisme constant, on les fera servir d'appuis aux côtés opposés d'un parallélogramme ayant  $ab$  pour base : en prenant sur  $bc$  et  $ap$ , et du même côté de  $ab$  (fig. 49 ou 50), deux parties égales  $br$  et  $an$  qu'on liera, au moyen de boulons ou de charnières, par une traverse  $rn$  égale à  $ab$ .

En fixant, à présent, l'un des points  $c$ ,  $t$  ou  $p$ , on pourra effectuer autour de ce point toutes les transformations du système, au moyen desquelles les figures décrites par les deux autres points de l'alignement  $ctp$  seront semblables,

§ 116, et auront entre elles un rapport déduit de  $\frac{at}{ab}$ ; de sorte que, en supposant  $p$  immobile et en dirigeant les transformations de  $rban$  tellement que  $c$  parcoure un contour donné: le point  $t$  décrira une figure semblable à ce contour, et les côtés homologues des deux figures auront pour rapport  $\frac{tp}{pc}$  ou  $\frac{at}{ab}$ .

119. La propriété géométrique du § 116 étant, ainsi, construite d'une manière bien simple; il s'agit d'en perfectionner l'usage.

Remarquons d'abord: que le rapport  $\frac{at}{ab}$  ou  $\frac{tb - ab}{ab}$  (*fig.* 49), qui détermine la grandeur de la copie relativement à l'original, peut être modifié sans changer la longueur  $cb$ , et par deux moyens:

1.<sup>o</sup> En faisant varier  $tb$ ; et en déplaçant, par conséquent,  $t$  et  $p$  sur leurs barres respectives, pour que l'alignement  $tpc$  soit conservé.

2.<sup>o</sup> En changeant  $ab$  et par suite  $ap$ ; le point  $t$  étant alors invariable.

De là dérivent deux genres de PANTOGRAPHES.

120. Le pantographe du 1.<sup>er</sup> genre, ou pantographe proprement dit, se compose (*fig.* 51) de quatre règles  $FB$ ,  $BN$ ,  $NA$ ,  $BE$  assemblées par des boulons rivés  $B$ ,  $N$ ,  $A$ , de manière que  $BN = BA$ ,  $NB = NA$ : les extrémités  $F$ ,  $B$ ,  $E$  sont supportées par de petites roulettes, pour diminuer le frottement sur le papier pendant le mouvement des règles. En  $c$ , la règle  $FB$  est percée d'un trou cylindrique propre à recevoir une pointe ou *calquoir*. De  $A$  en  $E$ , on place un crayon ou *traçoir*  $T$ : soit dans des trous percés sur cette longueur, soit avec une pince qui s'attache à ladite règle. La règle  $AN$  est aussi percée de trous, ou porte une pince, pour s'adapter à un pivot  $P$ , que l'on visse ordinairement sur un *plomb* assez lourd pour ne pouvoir se déplacer pendant le mouvement de l'instrument autour de ce pivot.



Le calquoir  $c$  étant supposé invariable sur sa règle ; on marque, sur les règles  $AN$  et  $AE$ , des points dont l'alignement passe par  $c$ , et l'on numérote ces points pour en repérer les divers alignements.

Afin que le crayon, servant de traçoir, frotte convenablement sur le papier : on le surmonte d'une coupelle que l'on charge d'un faible poids ; on évitera que le traçoir marque des lignes inutiles pendant le transport du calquoir sur les parties du dessin original : en adaptant, au-dessus de  $B$ , une petite poulie parallèle aux règles, et, sur la pince du traçoir, une semblable poulie perpendiculaire aux règles ; de manière qu'un fil, attaché au crayon et correspondant à  $c$  au moyen de ces poulies, permette de soulever le crayon lorsqu'il ne devra pas laisser de trace sur le papier.

Une détente, communiquant de  $c$  à  $\tau$  le long des règles  $FB$  et  $BE$ , remplace même, avec avantage, le fil et les poulies.

121. Pour employer le pantographe, c'est-à-dire, pour tracer, dans une proportion donnée, la copie d'une figure plane quelconque : il faut 1.<sup>o</sup> préparer l'instrument dans le rapport voulu ; pour cela, après avoir disposé en ligne droite le traçoir, le pivot et le calquoir, soit avec une règle, soit au moyen de repères déterminés d'avance (*fig. 51*), on fait glisser le calquoir  $c$  sur la plus grande distance possible  $ae$ , pour marquer la direction  $a'e'$  parcourue en même temps par le traçoir  $\tau$  ; et, prenant la longueur  $a'e'$  telle que  $\frac{a'e'}{ae}$  égale le rapport donné, on fera varier l'alignement  $\tau pc$ , en déplaçant le traçoir  $\tau$  et le pivot  $p$ , jusqu'à ce que le traçoir parcoure exactement la droite  $a'e'$  pendant que le calquoir marchera de  $a$  en  $e$ . 2.<sup>o</sup> Stationner le pantographe et le dessin à copier, de manière à faire parcourir au calquoir  $c$  le plus grand espace possible sur ce dessin, que l'on fixe alors, ainsi que le pivot  $p$ .

Il ne reste plus qu'à suivre, avec le calquoir  $c$ , les parties du contour donné, pour reproduire, avec le traçoir  $\tau$ , la copie dans les proportions désirées.

122. Si l'on veut qu'un côté de la copie s'appuie sur une direction choisie : il faudra disposer préliminairement la feuille de cette copie, pour que, le calquoir parcourant le côté correspondant du dessin original, le traçoir reste sur la direction désignée. Dans ce but, on placera (*fig. 51*) le calquoir *c* sur l'extrémité *b* du côté *bc* et le point *b'* de la copie sous le traçoir *r*; puis, on fera tourner la feuille de la copie, autour du point *b'*, jusqu'à ce que, le calquoir *c* étant sur l'autre extrémité *c* du côté *bc*, le traçoir *r* soit sur la direction donnée *b'c'*; après quoi, on arrêtera définitivement la feuille de la copie.

Lorsque le dessin original se composera de plusieurs feuilles, ou qu'il sera trop grand pour être circonscrit par le calquoir dans une seule station du pantographe; on divisera ce dessin en parties accessibles au calquoir, lesquelles s'assembleront successivement sur la copie : en stationnant, pour chacune d'elles, le pantographe de manière à appuyer les bases de départ du traçoir sur des lignes de raccord, conformément à ce qui vient d'être dit.

123. Les numéros d'alignement, qu'on écrit sur les règles *AN* et *BE* (*fig. 51*), peuvent aussi faire connaître les positions simultanées du pivot et du traçoir, qui produisent des rapports voulus entre les côtés du dessin et ceux de la copie.

En effet,  $\frac{r}{s}$  étant l'expression générale de ce rapport, on a :

$$\frac{AT}{AB} = \frac{r}{s} = \frac{TB - AB}{AB}, \quad \frac{PA}{CB} = \frac{TA}{TA + AB} = \frac{r}{r + s}$$

$$\text{d'où :} \quad TB = \left( \frac{r + s}{s} \right) AB, \quad PA = \left( \frac{r}{r + s} \right) CB.$$

Et, par diverses hypothèses sur le rapport  $\frac{r}{s}$ , on conclura autant de valeurs simultanées de *TB* et *PA*, savoir :

$$\begin{array}{l}
 \frac{r}{s} = 1 \left\{ \begin{array}{l} TB = 2AB \\ PA = \frac{CB}{2} \end{array} \right. \quad \frac{r}{s} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} TB = \frac{3AB}{2} \\ PA = \frac{CB}{3} \end{array} \right. \\
 \frac{r}{s} = \frac{1}{3} \left\{ \begin{array}{l} TB = \frac{4AB}{3} \\ PA = \frac{CB}{4} \end{array} \right. \quad \frac{r}{s} = \frac{1}{4} \left\{ \begin{array}{l} TB = \frac{5AB}{4} \\ PA = \frac{CB}{5} \end{array} \right. \\
 \dots \text{etc.} \dots
 \end{array}$$

De sorte que le n.<sup>o</sup> 1 marqué sur NA par  $PA = \frac{CB}{2}$  correspondra au n.<sup>o</sup> 1 placé sur BE, tel que  $TB = 2AB$ ; et cet alignement rendra la copie égale à l'original. De même:  $PA = \frac{CB}{3}$  et  $TB = \frac{3AB}{2}$  donneront des points numérotés  $\frac{1}{2}$ , relatifs à l'alignement TPC produisant chaque côté du traçoir moitié de celui du calquoir, et ainsi de suite.

124. Nous avons supposé que le pivot était sur la règle AN (fig. 51); mais on pourrait aussi le placer en c ou T. Il sera également permis de fixer le pivot à son support en rendant le traçoir et le calquoir mobiles sur leurs règles, où l'on indiquerait, alors, des repères propres à établir l'alignement TPC.

Toutes ces combinaisons, qui se rattachent aux divers moyens de faire varier le rapport primitif  $\frac{AT}{AB}$ , § 117, se coordonnent d'une manière analogue à celle que nous venons d'exposer.

125. Lorsqu'on emploiera des pinces pour attacher T et P sur leurs règles (fig. 51): il faudra que les boulons A, B et N soient en dehors de ces règles, pour que l'alignement BAT reste parallèle à BN pendant que l'alignement APN le sera à BC. De plus, à cause des intervalles  $t$  et  $p$  qui séparent le traçoir T et le pivot P, des faces servant d'index à leurs pinces, les distances TB et PA du précédent § deviendront:  $\left(\frac{r+s}{s}\right)AB + t$  et  $\left(\frac{r}{r+s}\right)CB + p$ ; c-à-d: que l'origine

des longueurs régulatrices  $\left(\frac{r+s}{s}\right)AB$  sera à une distance  $t$  de  $B$ , tandis que celle des longueurs  $\left(\frac{r}{r+s}\right)CB$  sera à une distance  $p$  de  $A$ .

126. Les quatre règles du pantographe du 2.<sup>e</sup> genre (fig. 52) s'assemblent, en  $B$  et  $N$ , par des boulons rivés, et aux points  $n$  et  $A$  par des chevilles volantes. Le calquoir, le pivot et le traçoir sont fixés sur leurs règles; des roulettes et un fil de détente sont adaptés aux règles  $FB$  et  $BE$ , comme dans le pantographe du 1.<sup>er</sup> genre. Les quatre règles sont percées de trous destinés à recevoir les chevilles volantes, après la modification convenable du parallélogramme régulateur  $ABRN$ . Ces trous sont repérés et numérotés, de manière à construire le parallélogramme relatif à la place qu'occupe  $P$  sur l'alignement  $CT$ .

On prépare cet instrument dans un rapport voulu: en faisant marquer au traçoir  $T$  une ligne  $a'a'$  qui ait le rapport désigné avec une longueur  $aa'$  parcourue, en même temps, par le calquoir  $C$ ; ce à quoi l'on parviendra: en changeant la place de  $P$  sur l'alignement  $CT$ , au moyen des chevilles  $A$  et  $B$ , tout en conservant la forme parallélogrammique de  $ABRN$ .

On stationnera, d'ailleurs, le pantographe du 2.<sup>e</sup> genre par rapport à l'original et à la copie, de la manière indiquée pour le pantographe du 1.<sup>er</sup> genre, § 121 et 122.

127. Les numéros des trous qui repèrent, sur les règles, les formes parallélogrammiques, servent à former immédiatement le rapport  $\frac{TA}{AB}$ , comme dans le pantographe du 1.<sup>er</sup> genre, § 123.

En effet,  $\frac{r}{s}$  étant l'expression générale du rapport des côtés homologues de la copie et du dessin, on a :

$$\frac{AT}{AB} = \frac{r}{s} = \frac{TB - AB}{AB}, \quad \frac{AP}{CB} = \frac{TA}{TA + AB} = \frac{r}{r + s},$$

d'où:  $AB = \left(\frac{s}{r+s}\right)TB, \quad AP = \left(\frac{r}{r+s}\right)CB.$

Et, par diverses hypothèses sur le rapport  $\frac{r}{s}$ , on conclura des valeurs simultanées de  $AB$  et  $AP$ , savoir :

$$\begin{aligned} \frac{r}{s} = 1 & \left\{ \begin{array}{l} AB = \frac{TB}{2} \\ AP = \frac{CB}{2} \end{array} \right. & \frac{r}{s} = \frac{1}{2} & \left\{ \begin{array}{l} AB = \frac{2TB}{3} \\ AP = \frac{CB}{3} \end{array} \right. \\ \frac{r}{s} = \frac{1}{3} & \left\{ \begin{array}{l} AB = \frac{3TB}{4} \\ AP = \frac{CB}{4} \end{array} \right. & \frac{r}{s} = \frac{1}{4} & \left\{ \begin{array}{l} AB = \frac{4TB}{5} \\ AP = \frac{CB}{5} \end{array} \right. \\ & & & \dots \text{etc} \dots \end{aligned}$$

De sorte que le trou n.<sup>o</sup> 1 marqué sur  $NA$ , par  $AP = \frac{CB}{2}$  (*fig. 52*), correspondra au n.<sup>o</sup> 1 placé sur  $BE$ , tel que  $AB = \frac{TB}{2}$ , et, en même temps, le trou n.<sup>o</sup> 1 de  $BF$  sera choisi de manière que  $BR = AN$ ; ce qui reviendra à tracer  $Bq = PN$  et à porter  $qR = AP = \frac{CB}{2}$ . Le trou n.<sup>o</sup>  $\frac{1}{2}$  sera marqué sur  $BE$  et  $RN$ , de façon que  $AB = RN = \frac{2TB}{3}$ , et sur les règles  $AN$  et  $BR$ , par  $AP = qR = \frac{CB}{3}$ , etc.....

En assemblant, alors, les règles avec des chevilles  $n$  et  $a$  placées dans des trous de mêmes numéros: on formera un parallélogramme, au moyen duquel l'alignement  $TPC$  produira un rapport connu entre la copie et l'original.

Rien n'empêche que  $CB = TB$  et que le pivot  $P$  serve de boulon d'assemblage aux règles  $AN$  et  $RN$ ; alors,  $P$  et  $N$  se confondront, ainsi que  $q$  et  $B$ , et cet arrangement simplifiera l'instrument en même temps que les données.

On remarquera aussi, comme au § 124, que le changement de position des points  $c$ ,  $r$ ,  $P$  modifiera seulement le rapport de la copie à l'original, et ne produira que l'une des variations imputables au rapport primitif  $\frac{AT}{AB}$ .

128. En armant de verniers, les pinces adaptées à deux

des repères de l'alignement TPC (*fig. 51*), on pourra former le rapport  $\frac{AT}{AB}$  assez exactement pour ne pas craindre d'amplifier un dessin, avec un pantographe du 1.<sup>er</sup> genre bien conditionné. Mais, lorsque le pantographe n'a, pour se repérer, que des trous distants en raison de la solidité des règles: on ne doit faire servir cet instrument qu'à la réduction des dessins, afin de rendre moins sensibles les erreurs dues à la manière peu exacte de le régler; c'est pourquoi, l'on n'emploie le pantographe du 2.<sup>e</sup> genre qu'aux transformations en petit, ou aux réductions, ce qui lui fait donner le nom particulier de *Micrographe*.

129. On *équipe* un pantographe et, surtout, un micrographe, avec quatre règles minces ayant de grosses épingles pour boulons; le pivot de l'alignement est un clou qu'on peut enfoncer dans la table. La suppression des roulettes et du fil de détente est assez incommode à un seul dessinateur; mais, lorsque deux personnes peuvent s'aider dans la manœuvre de cet instrument, on en tire souvent un grand parti, quelque frêle que soit sa construction.

130. Le pantographe sert à marquer immédiatement la contre-épreuve de la figure transformée: en donnant au traçoir  $\tau$  la position renversée  $\tau'$  (*fig. 51*). Le fil de détente est, alors, destiné à presser la pointe  $b''$  du traçoir contre une plaque disposée au-dessus du pantographe, parallèlement à la table qui supporte cet instrument.

C'est ainsi que l'on emploie le pantographe à graver les dessins, en même temps qu'on les transforme.

## CHAPITRE II. — INSTRUMENTS ET MOYENS PROPRES A OBTENIR LES DISTANCES.

### *Les Règles géodésiques, la Chaîne, le Cordéau, et le Pas de l'Homme ou du Cheval.*

131. On mesure la distance horizontale de deux points : en plaçant dans leur alignement , bout-à-bout et autant de fois que possible, des longueurs connues, ou *Portées*, que l'on maintient horizontalement.

Les précautions à prendre dans cette opération, et la nature des portées à employer, dépendent de l'exactitude que l'on s'est imposée.

On se sert, pour mesurer les distances qui exigent une grande précision, de RÈGLES en sapin  $r, r', r''$ ... (fig. 59), vernies après avoir été bouillies dans l'huile pour qu'elles soient moins sujettes aux influences thermométriques et hygrométriques de l'air. Ces règles, disposées sur des chevalets, sont horizontalement calées à l'aide de niveaux  $n, n'$ , § 270; on évite le recul, que leur juxta-position pourrait occasionner : en estimant le petit intervalle  $ab$  de leurs extrémités, avec une languette subdivisée  $pq$ , et encore : en insérant légèrement, dans l'intervalle des deux règles  $r, r'$ , une espèce de coin  $t$  partagé en petites zones numérotées.

132. Une CHAÎNE  $abc... x$  (fig. 60), composée de chaînons égaux  $ab, bc...$ , et longue de manière à être tendue sans dévier beaucoup de l'horizontale, convient presque toujours aux mesures topographiques. Elle est accompagnée d'un paquet de fiches  $F$ .

Les deux personnes, qui doivent manœuvrer la chaîne, la déploient d'abord, pour détruire les coudes qui s'opposent au prolongement successif des chaînons; elles remarquent la position des poignées terminant la chaîne, afin de les comprendre en dedans  $x$ , ou en dehors  $a$ , des chaînons adjacents; elles comptent, enfin, les fiches du paquet  $F$ .

Pour mesurer l'espace horizontal compris de  $A$  à  $B$

(fig. 36) : la première personne pose sa poignée au point de départ  $A$ , pendant que l'autre, qui porte les fiches, marche en tirant la chaîne ; la première personne maintient, par signés, la seconde dans l'alignement  $AB$ , et, quand la chaîne est tendue à peu près horizontalement, la seconde personne en marque l'extrémité avec une fiche, puis continue à marcher jusqu'à ce que la première, atteignant cette fiche, agisse comme au point de départ, l'enlève et donne le signal du mouvement pour arriver à la fiche 2. Et, ainsi de suite, jusqu'à ce que la seconde personne parvienne en  $B$ , dont la distance au point  $A$  s'estime par le nombre  $n$  des fiches que la première personne a ramassées, plus la fraction  $zb$  de la dernière chaîne.

Lorsque la personne, qui marche en avant, n'a plus de fiche : elle pose la chaîne tendue et vient retirer le paquet des mains de l'autre personne, qui conserve sa poignée à la place de la dernière fiche, remarquée sur le sol par deux traits croisés, et note le nombre de fois que le paquet de fiches lui a été demandé.

133. Un CORDEAU  $a'b'c' \dots x'$ , divisé par des nœuds (fig. 60), peut, dans quelques circonstances, remplacer la chaîne ; seulement, on évite de l'employer sur des terrains humides. Les nœuds, pour être à des intervalles égaux, se forment avec des morceaux de ficelle piqués dans le cordeau.

134. Le PAS de l'homme et celui du cheval suffisent, aussi, à des mesures approximatives de peu d'étendue, quand on s'est préalablement assuré de leur régularité : en parcourant plusieurs fois une même longueur, beaucoup plus grande que celles qu'on se proposera d'estimer. Le pas de route est ordinairement choisi pour terme de comparaison, parce qu'un homme fait ce pas plus long-temps régulier que tout autre ; mais on peut employer une allure quelconque du cheval, dont l'uniformité de mouvement est moins contestée.

135. Des distances  $D, D', D'', \dots$  ayant été mesurées avec la même portée  $P$ , les rapports  $\frac{D'}{D}, \frac{D''}{D}, \dots$  seront indépen-



dants de la nature de cette portée; mais l'évaluation de chaque distance, en fonction d'une unité de longueur désignée  $L$ , exigera la connaissance du rapport  $\frac{P}{L}$ , obtenu par la comparaison immédiate de  $P$  à  $L$ , ou, mieux encore, en mesurant, d'abord avec  $P$ , puis avec  $L$ , une distance  $D$  supérieure à celles qu'il faudra apprécier, de manière à avoir  $D = t'P$ ,  $D = tL$ , d'où  $\frac{P}{L} = \frac{t}{t'}$ .

136. Lorsqu'on devra mesurer des longueurs pour les traduire sur un plan, on pourra obtenir l'échelle graphique sans employer l'échelle numérique de ce plan: il faudra mesurer, avec l'unité  $L$ , la distance  $D$  homologue à une base graphique  $d$ , soit  $D = tL$ , et diviser  $d$  en  $t$  parties égales; puis,  $\frac{1}{M}$  étant l'échelle du plan, on a  $D = Md = tL$  et  $\frac{L}{M} = \frac{d}{t}$ . On facilitera même cette opération: en comptant, à partir d'un point  $A$  de l'alignement accessible  $AZ$  (fig. 22), un nombre d'unités *multiple pair de dix*; et en déterminant ensuite, sur le plan, les points  $a$  et  $z$  homologues aux extrémités de la longueur parcourue  $AZ$ , § 72 page 36, pour appliquer à  $az$  la méthode de construction de l'échelle § 101 page 52; et ce procédé rendra indispensable le choix d'une grande distance  $AZ$ , afin de mieux atténuer l'erreur de détermination graphique des extrémités  $A$  et  $Z$ .

137. Si l'espace à mesurer est tel qu'on ne puisse toujours en apercevoir les extrémités pendant qu'on le parcourra: on le subdivisera par des repères destinés à guider les opérateurs dans l'alignement principal.

Le problème des alignements sur deux points donnés présente plusieurs cas.

L'alignement devant être pris sur le prolongement de  $Ac$  (fig. 38): un observateur  $d$  se place de manière à cacher la verticale de  $A$  par celle de  $c$ .

Lorsque l'alignement doit avoir lieu entre  $A$  et  $B$ ,  $A$  étant accessible (fig. 36): une personne, stationnée à ce point, fait mouvoir, par signes, un jalonneur  $c$  jusqu'à ce que l'aplomb de  $B$  soit caché par le jalon  $c$ .

138. Pour jalonner un point de  $AB$  entre  $A$  et  $B$  inaccessibles : un premier jalonneur étant dans une position quelconque  $c$  (fig. 37), un second jalonneur  $d$  se prolonge sur  $Ac$ . Et, si les jalonneurs peuvent distinguer leurs signaux réciproques,  $c$  fait mouvoir  $d$  jusqu'à ce que  $c$ ,  $d'$ , et  $B$  soient alignés; après quoi, le jalonneur  $d'$  indique à  $c$  la position  $c'$ , puis  $c'$  fait placer  $d'$  en  $d''$ ; et ainsi de suite, jusqu'à ce que les deux plans verticaux  $dca$  et  $cdb$  se confondent.

Mais, quand les jalonneurs seront trop éloignés pour apercevoir leurs indications : après le premier alignement  $dca$ ,  $c$  marchera pour se rapprocher de  $AB$  (fig. 38), en faisant face à  $d$  qui, par des mouvements plus rapides que ceux de  $c$ , se conservera dans les prolongements  $Ac'$ ,  $Ac''$ ,... en  $d'$ ,  $d''$ ,.... jusqu'à ce que, pour le jalonneur  $c$ ,  $d$  couvre  $B$ ; et, alors, les quatre points  $A$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $B$  seront dans le même plan vertical.

Un observateur peut jalonner un alignement entre deux points inaccessibles  $A$  et  $B$ , s'il a préalablement marqué un point  $B$  sur leur prolongement (fig. 38); car toutes les positions prolongées de  $BD$  seront sur  $AD$ .

Enfin, un seul observateur arrivera sur l'alignement entre deux points inaccessibles, à l'aide d'un tuyau visuel pouvant se retourner bout-pour-bout.

Car, le support du tuyau étant mis en  $c$  (fig. 38), on dirigera son axe visuel sur  $A$  et l'on retournera ce tuyau bout-pour-bout, afin de remarquer la déviation du prolongement visuel  $cd$  par rapport à  $B$  ainsi que le sens du mouvement  $cc'$ , qui rapprochera le pied du tuyau visuel de l'alignement  $AB$ . A cette nouvelle position  $c'$ , on dirigera l'axe visuel en  $A$  pour le retourner ensuite bout-pour-bout, afin de reconnaître l'écart du rayon visuel relativement à  $B$ , et la quantité dont il faudra encore se déplacer pour une nouvelle vérification; jusqu'à ce que les deux positions retournées du tuyau visuel se prolongent respectivement sur les points  $A$  et  $B$ .

*La Stadia.*

139. L'évaluation des distances est tellement importante, qu'on a demandé à diverses expériences, plus ou moins précises, les moyens d'estimer ces distances, malgré les obstacles qui empêchent de les parcourir.

C'est ainsi que l'introduction de deux axes visuels dans un tuyau, ou une lunette, fournit trois procédés pour conclure les distances avec une simple observation visuelle.

En effet, on repère un rayon visuel  $oa$  (fig 61): en disposant, en croix, deux fils  $bq$ ,  $ca$  à l'extrémité d'un tuyau, ou au micromètre d'une lunette, et le nouveau fil  $eq$  donnera un autre rayon visuel  $oc$ .

Les deux rayons visuels  $oa$ ,  $oc$ , partant du même oculaire  $o$ , intercepteront, à une distance quelconque  $oa$ , une longueur  $ca$  supposée parallèle au fil  $ca$ ; et, en nommant  $d$  la distance de  $o$  à  $ca$ ,  $D$  celle de  $o$  à  $CA$ ,  $h$  l'intervalle  $ca$ , et  $H$  l'espace intercepté  $CA$ : on aura  $\frac{D}{H} = \frac{d}{h}$ .

C'est ordinairement une verticale  $ca$  qu'on intercepte par les rayons visuels  $oc$ ,  $oa$ ; et l'on rend, aussi, le fil micrométrique  $ca$  vertical: en disposant, d'abord, l'un des axes visuels  $oa$  parallèlement au tuyau par le procédé du § 160 page 94, et calant ensuite ledit tuyau horizontalement à l'aide d'un niveau, § 270, pour faire coïncider à  $ca$  la verticale  $ca$ , au moyen de la rotation du tuyau sur son axe de longueur.

140. Admettons la distance  $d$  invariable pour un même tuyau visuel (ce qui a toujours lieu dans un simple tuyau; tandis que, pour l'obtenir dans une lunette, il faudra fixer le micromètre au tube de l'oculaire après en avoir éprouvé la correspondance focale, sauf à arriver au point de vue de chaque observation par le tirage du tube de l'objectif): deux des quantités  $D$ ,  $H$  et  $h$ , contenues dans l'équation  $\frac{D}{H} = \frac{d}{h}$ , pourront être arbitraires pour en conclure la troisième. En assujettissant à diverses hypothèses les facteurs  $H$

et  $h$ , qui entrent dans la valeur de la distance  $D$  : on en déduira autant de procédés pour déterminer cette distance, dont la précision comportera, cependant, une incertitude due à la petitesse des espaces observés  $H$  et  $h$  ; et l'on aura à considérer les cas suivants :

- 1.<sup>o</sup>  $h$  constant  $H$  variable,  $H$  étant accessible.
- 2.<sup>o</sup>  $h$  variable  $H$  constant, }  $H$  pouvant être inaccessible.
- 3.<sup>o</sup>  $h$  et  $H$  variables, }

Le tuyau, à deux axes visuels  $oc$ ,  $oa$ , et la verticale de mire  $ca$  composent la *STADIA*, accessible ou inaccessible selon l'expérience qui la règle.

141. En supposant 1.<sup>o</sup>  $h$  constant et  $H$  variable : la constante indéterminée  $\frac{d}{h}$  disparaîtra dans la comparaison

de deux distances  $D$  et  $D'$ , et l'on aura  $D = \frac{D'}{H'} H$ . Si donc,

on dispose verticalement : le fil  $ca$  et une tige  $ts$  aux extrémités  $x$  et  $\tau$  d'une distance horizontale connue  $D'$  (fig. 61), et qu'on mesure la hauteur  $ac = H'$ , interceptée sur  $st$  par les prolongements des rayons visuels  $oa$ ,  $oc$  ; on aura  $\frac{D'}{H'} = f$  : alors, toute distance  $D$  sera exprimée par  $f \cdot H$ , et

$\frac{D}{L} = f \frac{H}{L}$ . En sorte que, la tige  $st$  étant divisée en petites parties  $L$  : on observera immédiatement le rapport  $\frac{H}{L}$  qui, multiplié par le facteur constant  $f$ , donnera le nombre de parties  $L$  composant la longueur  $D$ , avec d'autant plus de précision que la distance préliminaire  $D'$  aura été plus grande.

142. L'expression  $\frac{D}{L} = f \frac{H}{L}$ , pouvant être mise sous la forme  $\frac{D}{L} = H : \frac{L}{f}$ , s'interprétera encore de la manière suivante : la longueur  $L$  sera contenue dans une distance  $D$  autant que  $\frac{L}{f}$  le sera dans la hauteur interceptée  $H$ . Et, dès-

lors, une tige, où l'on aura marqué des parties égales à  $\frac{L}{f}$ , fera lire immédiatement le rapport  $n: \frac{L}{f} = n$ , et conséquemment  $\frac{D}{L} = n$ .

143. Si, pour régler le tuyau visuel *oca* et la tige graduée *sr*, qui forment la *Stadia accessible*, on adopte le mètre comme unité de longueur : les divisions *sa, ab, bc...*, de la tige (*fig. 63*), représenteront  $\frac{10^m}{f}$  ; un seul intervalle *sa* aura cinq subdivisions, valant chacune  $\frac{2^m}{f}$  qui correspond à la distance horizontale 2 mètres. Les divisions principales sont désignées par de gros points, afin d'être plus distinctes. La tige, pour être commodément transportée, se plie en deux, au moyen d'une charnière *p* à laquelle on suspend un fil-à-plomb destiné à rendre cette tige verticale.

La distance, susceptible d'être appréciée avec la *stadia accessible*, dépend de la force du tuyau visuel ; il est des lunettes de quinze centimètres, qui font distinguer les points de la tige dans un éloignement de 500 mètres.

En observant avec la *stadia* : on dirige l'un des rayons visuels sur une division principale de la tige, tandis que l'autre rayon visuel rencontre l'espace *sa* contenant les petites parties  $\frac{2^m}{f}$ .

144. Les fils micrométriques *eg, bq*, qui établissent les rayons visuels d'un tuyau, pouvant se déranger dans leur cadre ; il sera nécessaire de vérifier souvent le facteur  $f = \frac{d}{h} = \frac{D'}{H'}$  du § 141, ou la partie  $\frac{L}{f}$  du § 142 : en répétant l'expérience fondamentale, c'est-à-dire, en mesurant une hauteur *n''* correspondant à une distance connue *D''*, aussi grande que possible.

L'intervalle primitif *h* des fils micrométriques sera, d'ailleurs, facilement conservé : si l'un des fils *eg* étant mobile au moyen d'une vis *v* (*fig. 61*), on fait intercepter à cet intervalle la hauteur *n''* terminant la distance connue *D''*.

145. Quand on emploiera la stadia accessible pour évaluer des longueurs qui devront être traduites sur un plan : il sera avantageux de lire immédiatement les distances graphiques, indépendamment de l'échelle numérique du plan, au moyen de l'une des préparations suivantes :

1.<sup>o</sup> Diviser la tige, d'après une échelle graphique et un tuyau visuel donnés.

2.<sup>o</sup> Régler les fils du tuyau visuel, sur une tige graduée et sur une échelle graphique.

3.<sup>o</sup> Conclure l'échelle graphique, relativement à une stadia donnée par sa tige graduée et son tuyau visuel.

Ayant stationné le tuyau visuel  $aco$  en  $x$ , et la tige  $st$  en  $\tau$  (fig. 61), à la distance  $d'$  graphiquement connue; si  $n'$  représente le nombre de parties  $\left(\frac{L}{f}\right)$  composant la hauteur interceptée  $ca$  ou  $n'$ , que  $l$  désigne l'unité graphique  $\frac{L}{m}$  : on

aura  $d' = md'$ , et, d'après le § 142,  $\frac{d'}{L} = n' : \frac{L}{f} = n' = \frac{d'}{l}$ .

D'où :

1.<sup>o</sup>  $\frac{L}{f} = n' : \frac{d'}{l}$  montre que la partie  $\frac{L}{f}$ , propre à graduer la tige, s'obtiendra en divisant l'espace intercepté  $n'$  par le nombre  $\frac{d'}{l}$ , qui est la valeur de  $d'$  estimée sur l'échelle connue.

2.<sup>o</sup>  $n' = \frac{d'}{l}$  prescrit de mouvoir l'un des fils  $eg$  pour intercepter, sur la tige graduée, autant de parties que l'indique le nombre  $\frac{d'}{l}$  donné par l'échelle.

3.<sup>o</sup>  $l = \frac{d'}{n'}$  fait construire l'échelle : en divisant  $d'$  par le nombre observé  $n'$ ; et cette division sera facilitée, en choisissant la distance naturelle  $d'$ , telle que  $n'$  devienne un multiple pair de 10, sauf à chercher le  $d'$  correspondant, comme on l'a pratiqué au § 136 page 77.

146. Pour continuer la discussion du § 140, admettons

2.°  $h$  variable et  $D$  constant dans l'équation  $D = \frac{dn}{h}$ ; la constante inconnue  $dn$  disparaîtra dans la comparaison de deux distances  $oA = D$  et  $o'A = D'$  (fig. 65), pour lesquelles les angles visuels  $coa$  et  $c'o'a'$ , interceptant une même hauteur  $CA$ , détermineront au micromètre des intervalles différents  $ca = h$ ,  $c'a' = h'$ ; et l'on aura  $\frac{D}{D'} = \frac{h'}{h}$ ,  $D = D' \frac{h'}{h}$ .

Imaginons (fig. 64) un micromètre divisé en petites zones égales, soit par des fils déliés, ou au moyen d'un verre transparent très délicatement rayé; on pourra estimer le nombre des zones interceptées sur ce micromètre par un angle visuel, ce qui établira  $\frac{h'}{h} = \frac{n'}{n}$  et  $D = D' \frac{n'}{n}$ . Dès-lors, en évaluant une première distance  $o'A = D'$ , accessible ou inaccessible la plus grande possible (fig. 65), et en comptant le nombre  $n'$  des zones micrométriques comprises dans l'angle visuel  $c'o'a'$  qui intercepte une hauteur  $CA$ ; on aura la longueur d'une autre distance  $oA$ : en divisant la longueur constante  $D'n' = f$ , par le nombre  $n$  des zones micrométriques, qu'embrasse l'angle  $coa$  appuyé sur la même hauteur  $CA$ .

Et, comme cette hauteur constante peut être inaccessible, elle composera, avec le tuyau visuel à micromètre variable, une *Stadia inaccessible à repère constant*.

Par exemple: supposons que  $CA$  soit une arête verticale d'un bâtiment visible des points  $o$  et  $o'$ , et que, à la distance  $o'A = 800^m$ , l'angle visuel  $c'o'a'$  intercepte 4 zones et demie du micromètre, le facteur  $f$  ou  $D'n'$  égalera  $3600^m$ : admettons aussi que, à l'angle visuel  $coa$ , correspondent 7 zones du micromètre, on aura:  $oA = D = \frac{3600^m}{7} = 514^m$ .

Si l'on devait rattacher un grand nombre d'expériences à la même hauteur de mire, il serait commode de calculer d'avance une table des valeurs  $\frac{f}{n}$ , qui donnerait  $D$  pour chaque nombre  $n$  observé avec le tuyau visuel de longueur invariable.

147. On supplée aux divisions délicates du micromètre, par le mécanisme suivant :

$xy$  (fig. 66) est un limbe dont l'épaisseur est traversée, à son centre, par une vis qui, se mouvant au moyen d'un écrou  $wv$  à collet fixe, entraîne le fil micrométrique  $eg$  parallèlement à  $bq$ ; une aiguille  $uy$  fait corps avec l'écrou pour indiquer le mouvement de la vis.

En remarquant la place occupée par l'aiguille sur le limbe, au moment de la coïncidence des fils  $eg$  et  $bq$ ; quand l'aiguille aura parcouru une circonférence,  $eg$  sera distant de  $bq$  d'une quantité égale au pas  $p$  de la vis: et, si  $n$  désigne le nombre des grades parcourus par l'aiguille, pour une distance  $h$  des deux fils:  $h$  contiendra autant de fois  $p$ , que  $n$  grades contiendra de fois 400 grades, ou :

$\frac{h}{p} = \frac{n}{400}$ ; on aura aussi:  $\frac{h'}{p} = \frac{n'}{400}$ ; donc  $\frac{h}{h'} = \frac{n}{n'}$ . C'est-à-dire que le rapport des nombres de grades parcourus par l'aiguille, depuis la coïncidence des fils jusqu'aux intervalles micrométriques  $h, h'$ , donnera le rapport de ces intervalles.

Afin de reconnaître facilement l'espace parcouru par l'index  $uy$ : on adapte, contre le limbe  $xy$ , une roue dentée  $az$  engrenant avec la branche  $ux$  soudée à l'écrou  $wv$ ; les dents de cette roue sont numérotées de manière que la dernière dent engrenée donne le nombre des circonférences décrites par le point  $y$ , tandis que la fraction de la dernière circonférence est marquée, sur le limbe  $xy$ , par la graduation où s'arrête l'aiguille.

Il sera commode de faire correspondre la coïncidence des fils, au zéro de la roue dentée  $az$  et à celui du limbe  $xy$ .

148. Lorsque la verticale de repère  $ca$  (fig. 67) sera dans l'alignement des points  $o$  et  $o'$ : on pourra déterminer ses distances à chacun d'eux, en mesurant la seule longueur  $oo'$ .

En effet, appelons  $n$  cette dernière longueur, et  $n, n'$  les nombres de parties interceptées au micromètre par les angles visuels  $coa, c'o'a'$ : soit au moyen de zones égales, § 146,



soit par le mécanisme précédemment détaillé; ou aura :

$$\frac{D'}{D} = \frac{n}{n'}, D' - D = B; \text{ d'où } D' = \frac{n}{n'} B; \left( \frac{n}{n'} - 1 \right), D = B; \left( \frac{n}{n'} - 1 \right).$$

Supposons  $B = 56''$ ,  $\frac{n}{n'} = \frac{7}{5}$ : il vient  $D = 140''$ ,  $D' = 196''$ .

149. Considérons, enfin, la troisième hypothèse  $h$  et  $H$  variables dans l'équation  $D = d \frac{H}{h}$  du § 140 page 79.

On a, pour le rapport de deux distances  $D, D'$ ,  $\frac{D}{D'} = \frac{H h'}{H' h}$ , et, si  $n'$  désigne le nombre des divisions micrométriques interceptées par l'angle visuel qui s'appuie sur une hauteur  $H'$  évaluée d'avance à une distance  $D'$ , accessible ou inaccessible et la plus grande possible; le facteur  $\frac{D' n'}{H'}$  de la valeur  $D = \frac{D' n'}{H'} \cdot \frac{H}{n}$  servira à calculer  $D$ , lorsqu'on aura estimé  $H$  et  $n$ . Les nombres  $n, n'$  étant obtenus au moyen du micromètre subdivisé (fig. 64), ou de l'appareil décrit § 147 (fig. 66).

Et, quand la hauteur de mire variable  $H$  sera inaccessible : elle constituera, avec le tuyau visuel à micromètre variable, une *Stadia inaccessible à repère variable*.

Soit, pour exemple, l'expérience suivante :

Une hauteur de 5<sup>m</sup> a été interceptée à une distance de 800<sup>m</sup> par un écartement micrométrique correspondant à 1400 grades du limbe extérieur  $XY$  (fig. 66), c'est-à-dire :  $H' = 5''$ ,  $D' = 800''$  et  $n' = 1400$ ; donc le facteur constant  $f = \frac{n' D'}{H'} = 224000$ . Interceptons maintenant, par 875 grades, une hauteur 2<sup>m</sup>, on aura :

$$D = 224000 \frac{2''}{875} = 512''.$$

On voit, d'après cela, quel parti on peut tirer d'un tuyau visuel à mécanisme micrométrique (fig. 66), pour estimer approximativement la distance où l'on se trouve d'objets, dont on suppose la hauteur.

On pourrait même, après avoir calculé le facteur constant

$\frac{n'd'}{h'} = f$  propre à un tuyau visuel, former un tableau des valeurs  $f \frac{h}{n}$ , dans lequel on entrerait avec les arguments  $h$  et  $n$  pour avoir, sur-le-champ, la distance correspondante  $d$ .

*Évaluation des distances au moyen du temps.*

150. On trouve, aussi, le rapport entre plusieurs longueurs : par celui des *temps* employés à les franchir avec un mouvement régulier. Tellement que, ayant préalablement reconnu la vitesse de ce mouvement, ou l'espace parcouru pendant l'unité de temps, qui est la *seconde* pour un mouvement rapide et la *minute* pour un mouvement lent : on appréciera une longueur  $D$ , en multipliant cette vitesse  $v$  par le nombre  $t$  des unités de temps, écoulées pendant le trajet de ladite longueur, c'est-à-dire,  $D = tv$ .

Il sera, alors, utile de numérotter, en fonction du temps, l'échelle graphique dont on devra faire usage : en lui donnant pour unité, la vitesse graphique  $\frac{v}{m}$ , ou  $v$ , qu'on pourra même conclure, comme au § 136 page 77, d'une distance graphique  $d$  homologue à la distance naturelle  $D$ , parcourue pendant le temps  $t$ .

151. Il y a des circonstances où l'on se borne à déduire les *grandes* distances directes, des longueurs *itinéraires* qui séparent leurs extrémités : en prenant les  $\frac{4}{5}$  de ces longueurs, quand elles traversent un terrain fortement accidenté, et les  $\frac{6}{7}$  du chemin, en terrain plat ou peu accidenté. C'est-à-dire que, si on désigne par  $A$  et  $P$  ces deux sortes d'itinéraires, et par  $D$  la distance directe : on écrit  $D = \frac{4}{5}A$ ,  $D = \frac{6}{7}P$ .

Et, pour n'avoir à observer que le temps de chaque itinéraire ; on a expérimenté que le chemin, ordinairement fait pendant une *minute*, était de : 10 décamètres par le *piéton* ;

15 décamètres par le *cavalier* au petit trot, et 25 décamètres par la *marche en poste*.

152. Enfin, on a tiré parti de la manière dont le son se propage, pour évaluer de grandes distances.

Après avoir remarqué, au moyen de la machine pneumatique, que l'air était le véhicule du son; on a comparé l'effet instantané de la lumière à la vitesse du son dans l'atmosphère, et l'on a trouvé cette vitesse très-limitée et constante: le son étant grave ou aigu, intense ou faible. On a reconnu: que le son parcourait environ 34 décamètres par seconde, dans une atmosphère calme; que le vent, pour influer sensiblement sur cette vitesse, devait être à-peu-près dirigé comme le son; et qu'alors: un vent ordinaire augmentait ou diminuait, d'environ un décamètre, la vitesse du son calme, tandis qu'un vent orageux pouvait l'altérer de 3 décamètres.

Cela posé, lorsqu'un observateur pourra estimer le temps écoulé entre l'origine du son et le moment où il l'a perçu, il aura sa distance au point où le son a pris naissance: en multipliant le nombre des secondes de ce temps par  $(34 \pm \text{la vitesse du vent})$ . Or, la détonation des armes à feu étant accompagnée d'une lumière instantanée: si on remarque le temps écoulé, entre l'apparition de la lumière qui est l'origine du son et la perception de ce dernier, on pourra évaluer la distance séparant la station de l'arme à feu, du lieu où le son est parvenu.

153. Comme ce moyen d'apprécier les distances dépend principalement de l'observation du temps, que les meilleurs chronomètres portatifs n'indiquent pas sans l'incertitude d'un *quart* ou d'une *demi-seconde*; on l'appliquera, seulement, aux distances qui seront très grandes relativement à l'erreur, dont leur évaluation pourra être affectée.

Or, en désignant par  $\tau$  l'incertitude d'observation du temps  $t$ , et par  $e$  l'erreur qui en résultera sur la distance  $D$ ; on aura, en ne tenant pas compte de l'influence du vent:

$$D + e = (t + \tau) v, \quad e = \tau v = \tau 34^{\text{décam.}}$$

et, le chronomètre étant précis à moins d'un quart de seconde,  $\epsilon$  vaudra de 8 à 9 décamètres.

C'est pourquoi on assigne, pour limite inférieure aux distances appréciables au moyen du son, celle de 80 décamètres, ou 8 hectomètres, passible d'une erreur du dixième de sa longueur. On voit qu'une distance de 8 kilomètres sera estimée avec une chance d'erreur, qui n'en dépassera pas le centième.

154. L'expérience, qui a servi à déterminer la vitesse du son dans l'atmosphère calme ou agitée, étant aussi simple qu'importante; nous croyons utile de la mentionner.

Deux observateurs A et B, munis de montres à secondes et de tout ce qui convient pour produire une détonation lumineuse, se placent à l'une et l'autre extrémités d'une distance AB, aussi grande que le permet l'extension du son, et font succéder leurs détonations, assez promptement pour que l'atmosphère n'ait pas changé d'état physique; chaque observateur note le temps écoulé, depuis la lumière qui lui a accusé la détonation de l'autre, jusqu'à la perception du son.

Soient  $t$  et  $t'$  les nombres de secondes que le son met à parvenir aux observateurs A et B,  $v$  la vitesse du son, ou l'espace qu'il parcourt pendant une seconde dans l'atmosphère calme,  $\lambda$  la correction de cette vitesse due au vent, et D la distance AB, on aura :

$$\text{en A, } D = t (v \mp \lambda)$$

$$\text{en B, } D = t' (v \pm \lambda)$$

$$\text{D'où l'on tire : } v = \frac{D(t+t')}{2tt'}, \quad \mp \lambda = \frac{D(t-t')}{2tt'}, \quad D = \frac{2v tt'}{t+t'}$$

En sorte que, connaissant la distance D, on aura la valeur de  $v$  et celle de  $\lambda$  au moment de l'observation. Cette expérience, répétée dans diverses circonstances atmosphériques et aux extrémités de bases différentes, a toujours fourni une valeur de  $v$  très rapprochée de 34 décamètres, en même temps que l'influence  $\lambda$  s'est trouvée entre 1 et 3 décimètres. La forme de la valeur de D montre, d'ailleurs, comment deux observateurs, placés à l'une et l'autre extrémi-

tés d'une distance, peuvent en obtenir l'étendue, indépendamment de l'influence du vent.

Citons, pour exemple, les observations faites simultanément à la pyramide de Montmartre et à la tour de Montlhéry, lieux dont la distance 2853 décamètres a été calculée trigonométriquement.

On a établi une pièce de canon d'un fort calibre à chacune des stations; et les observateurs, munis de chronomètres bien réglés et de lunettes, s'étaient entendus sur le moment de commencer leurs expériences.

Une détonation, faite à Montlhéry, a été perçue à Montmartre 83 *secondes et demie* après l'apparition de la lumière qui l'avait occasionnée; et, presque aussitôt, le son a mis 81 *secondes* pour franchir l'espace de Montmartre à Montlhéry.

On a donc eu :  $D = 2853$  <sup>décam.</sup> décamètres,  $t = 88,5$ ,  $t' = 81$ ;  
d'où on a conclu :  $v = 33,7$  <sup>décam.</sup> et  $\lambda = 1,5$ .

#### *Réduction des longueurs inclinées à l'horizon.*

155. Lorsque, dans la recherche d'une distance géodésique, les portées n'ont pu être placées horizontalement : il paraîtra convenable de réduire à l'horizon les longueurs partielles qui se sont écartées de cette position, pour en conclure la distance cherchée. Mais cette correction ne se trouvant nécessaire, qu'autant qu'elle dépassera les chances d'inexactitude dues aux moyens mis en usage dans les mesures partielles; on aura seulement à s'en occuper pour les distances obtenues avec les règles géodésiques, la chaîne et, parfois, avec la stadia accessible.

Pour réduire à l'horizon une longueur  $ACB$  (fig. 57) composée de plusieurs parties  $n_1, n_2, \dots$  mesurées sur des pentes différentes : on calculera la correction propre à chacune de ces parties, pour faire la somme des résultats et la re-

trancher de la somme des portées qui composent l'espace parcouru ACB.

Or,  $D_1, n_2, D_3, \dots$  étant les longueurs partielles mesurées sur des pentes  $i_1, i_2, i_3, \dots$ ; et  $P_1, P_2, P_3, \dots$  les projections horizontales de ces longueurs, on a :

$$P_1 = D_1 \cos i_1 \text{ et correct: } D_1 - P_1 = n_1 - D_1 \cos i_1 = 2D_1 \sin^2 \frac{i_1}{2}$$

$$P_2 = n_2 \cos i_2 \dots \dots D_2 - P_2 = n_2 - D_2 \cos i_2 = 2D_2 \sin^2 \frac{i_2}{2}$$

$$P_3 = D_3 \cos i_3 \dots \dots D_3 - P_3 = D_3 - D_3 \cos i_3 = 2D_3 \sin^2 \frac{i_3}{2}$$

.... etc....

.... etc....

en sorte que :

$$P_1 + P_2 + \dots = D_1 + n_2 + \dots - 2 \left( D_1 \sin^2 \frac{i_1}{2} + D_2 \sin^2 \frac{i_2}{2} + \dots \right),$$

ou, en représentant par  $n$  le développement de la longueur mesurée sur le terrain incliné, et par  $P$  sa projection :

$$P = D - 2 \left( D_1 \sin^2 \frac{i_1}{2} + D_2 \sin^2 \frac{i_2}{2} + \dots \right)$$

Dans le cas où toutes les parties  $D_1, D_2, \dots$  auraient la même pente  $i$ , l'équation précédente deviendrait :

$$P = D - 2 \left( n_1 + D_2 + \dots \right) \sin^2 \frac{i}{2} = D - 2D \sin^2 \frac{i}{2}.$$

Et, si l'on voulait traduire graphiquement la distance  $P$  : la correction  $(n - P) = 2D \sin^2 \frac{i}{2}$  serait négligeable, quand elle

ne dépasserait pas  $\frac{M^m}{10000}$ , § 7 p. 2, d'où  $D < \frac{M^m}{20000 \sin^2 \frac{i}{2}}$  et

$\sin^2 \frac{i}{2} < \frac{M^m}{20000D}$ , exprimant la limite des pentes  $i$  que l'on peut négliger pour une longueur  $D$ , ainsi que la limite des distances  $D$  qui, jusqu'à une valeur désignée de  $i$ , n'ont pas à subir de correction *graphiquement* sensible.

Une table des valeurs de  $2D \sin^2 \frac{i}{2}$ , calculée pour les suppositions admissibles des arguments  $D$  et  $i$ , donne immédiatement les corrections qui projettent à l'horizon les distances mesurées sur des pentes quelconques, § 308.

Soit proposé, pour exemple, de trouver la réduction qui convient à la longueur  $D=346^m,75$ , mesurée sur la pente  $i=9^{\circ},50$ .

L'inclinaison  $9^{\circ},50$  étant la moyenne entre  $9^{\circ}$  et  $10^{\circ}$ , je prendrai la moyenne des résultats correspondant à  $9^{\circ}$  et  $10^{\circ}$ , dans les colonnes intitulées *mesure* sur la table du § 308.

La réduction pour  $300^m$  . . . . . est de  $3^m,35$   
 pour  $40^m$  ou  $\frac{400^m}{10}$  . . . . .  $0,45$   
 pour  $6^m$  ou  $\frac{600^m}{100}$  . . . . .  $0,066$   
 pour  $0^m,7$  ou  $\frac{700^m}{1000}$  . . . . .  $0,008$   
 pour  $0^m,05$  . . . . .  $0,000$

la réduction totale est de. . . . .  $3^m,87$   
 et la distance réduite égale  $(346^m,75 - 3^m,87) = 342^m,88$ .

156. Quant à la correction relative à l'emploi de la stadia accessible; elle provient de ce qu'une longueur  $xt$  (fig. 62), soumise à l'observation, sera tellement étendue ou inclinée à l'horizon, que l'angle visuel  $coa$  ne pourra intercepter la tige verticale sans incliner fortement le tuyau visuel; ce qui détruira la similitude des triangles  $coa$ ,  $coA$ , ainsi que la proportion fondamentale de la stadia, § 139, page 79. A moins, donc, d'apprécier la distance horizontale  $x'A$  par plusieurs stations intermédiaires, il faudra corriger l'observation  $oac$  de la manière suivante :

$ca$  étant l'espace vertical intercepté par les deux rayons visuels  $oa$ ,  $oc$  du tuyau convenablement incliné, soit  $i$  l'inclinaison de  $oA$  sur l'horizon; en imaginant par le point  $A$ , la perpendiculaire  $ac'$  sur  $oA$ , on aura : distance  $oA = f$ .  $ac'$ , § 141 page 80; mais le triangle  $cac'$  donne :

$$\frac{ac'}{ac} = \frac{\sin(c' + i)}{\sin c'} = \cos i + \sin i \cot c'$$

et, à cause que  $\sin i$  et  $\cot c'$  sont très-petits, le terme  $\sin i \cot c'$  sera négligeable par rapport à  $\cos i$ : on aura  $ac' = ac \cos i$ ; en outre,  $oA = \frac{L'A}{\cos i}$ , donc  $L'A = f. ac \cos^2 i$ .

Ainsi, pour avoir  $L'A$  : il faudra estimer la longueur  $LT$  comme si elle était horizontale, et multiplier le résultat par le carré du cosinus de l'inclinaison du tuyau visuel sur l'horizon.

En se proposant, comme précédemment, de trouver la correction plutôt que la distance toute réduite, on aura :

$$\text{correction } (D - P) = B (1 - \cos^2 i) = D \sin^2 i,$$

dont on pourra souvent apprécier l'importance, et à laquelle on se dispensera, même, d'avoir égard dans les opérations graphiques, quand  $D \sin^2 i < \frac{3^m}{10000}$ .

Une table des valeurs de  $D \sin^2 i$ , calculée pour les suppositions admissibles des arguments  $D$  et  $i$ , fournit immédiatement les corrections dues aux pentes des distances estimées avec la stadia, § 308. Cette table, écrite en regard des corrections imputables aux mesures immédiates, se distingue par son titre.

Soit proposé de trouver la réduction de la distance  $D = 476^m$ , qui a été *estimée* avec la stadia accessible sur une pente  $i = 6^s, 25$ .

L'angle  $6^s, 25$  étant au quart de l'intervalle de  $6^s$  à  $7^s$ ; on prendra, dans chaque colonne intitulée *stadia* de la table § 308, le quart de la différence entre les résultats fournis par  $6^s$  et  $7^s$ , pour l'ajouter à la correction correspondant à  $6^s$ .

La réduction pour  $400^m$  . . . . . est de  $3^m, 9$

pour  $70^m$  ou  $\frac{200^m}{10}$  . . . . .  $0, 7$

pour  $6^m$  ou  $\frac{600^m}{1000}$  . . . . .  $0, 1$

la réduction totale est de. . . . .  $4^m, 7$  ou  $5^m$   
et la distance réduite égale  $(476^m - 5^m) = 471^m$ .

Nous avons dû négliger les fractions de mètre, comme étant au-dessous de l'erreur d'observation, § 143 page 81.

157. La comparaison des erreurs qui affectent les longueurs évaluées sur la même pente, avec la mesure et avec la sta-



dia accessible, conduirait à donner aux secondes corrections plus d'importance qu'aux premières, si on ne se rappelait le peu de justesse des observations visuelles avec la stadia, et l'inconvénient grave de conclure, par ce procédé, des distances beaucoup plus considérables que les dimensions observées n, § 141 page 80.

Ainsi donc, sans négliger les corrections qui peuvent appartenir à la stadia accessible, il est utile de reconnaître combien elles sont peu essentielles, surtout dans les opérations de détail où cet instrument est particulièrement employé.

### CHAPITRE III. — INSTRUMENTS ANGULAIRES, OU GONIOMÈTRES.

#### *L'Alidade.*

158. La mesure d'un angle consiste à reconnaître l'espace circulaire que parcourt une direction visuelle, en passant de l'un des côtés de cet angle à l'autre.

L'ALIDADE, qui sert à repérer matériellement une direction en même temps qu'on la vise, se compose d'une règle ou base  $AB$  (fig. 68) surmontée de deux pinnules  $RA$ ,  $VB$  propres à diriger un rayon visuel. On conserve ces pinnules par des cadres  $ar$ ,  $bv$ , et on les renferme aussi dans un tuyau, ou une lunette  $rtv$  (fig. 69), rendant les points de mire plus apparents; il suffit, quelquefois, de diriger le rayon visuel avec l'arête  $rv$  d'une règle épaisse  $RAVB$  (fig. 68), à laquelle on supplée, au besoin, par un morceau de papier, deux fois plié pour former la ligne visuelle  $rv$  et la ligne de foi  $AB$ .

Une alidade est dite *plongeante*, lorsque la longueur des pinnules permet d'incliner le rayon visuel par rapport à la base, ou que le tuyau, renfermant les pinnules, peut tourner sur une charnière  $p$  qui surmonte cette base  $ab$  (fig. 70, 82).

L'axe visuel d'une alidade est donné par les pinnules ; sa ligne de foi est un côté  $ab$  de sa base. Dans les observations délicates, l'extrémité de la ligne de foi sert d'origine à un vernier, destiné à apprécier les fractions des plus petites divisions du limbe sur lequel marque cette ligne, § 108 page 61.

159. Selon que l'on désire l'angle de deux rayons visuels, ou bien la projection de cet angle sur un plan désigné : on appuie l'alidade sur le plan dudit angle, ou sur celui de projection. Dans le premier cas, il est nécessaire que l'axe visuel de l'alidade soit parallèle au plan de sa base ; et, dans le second, il suffit que cet axe ne sorte pas d'un plan perpendiculaire à la base, dans toutes les plongées de son tuyau.

D'où il résulte que : l'axe visuel d'une alidade plongeante, la charnière de son tuyau et le plan de sa base sont assujettis à des positions relatives, qu'il importe d'établir ou de vérifier avant d'employer cet instrument.

160. Et d'abord, pour rendre l'axe visuel d'une alidade parallèle à sa base : on a recours à un tuyau visuel d'épreuve, en forme de parallélépipède, ou de cylindre emmanché dans deux collets rectangulaires et égaux  $ac$ ,  $bd$  (fig. 72) ; le micromètre de ce tuyau se meut avec une vis  $n$ , qui permet de régler l'axe visuel  $rv$  parallèlement à la base  $ab$ , par le procédé suivant :

On pose, sur un plateau  $ax$ , les faces  $c$  et  $d$  du tuyau d'épreuve, dont on dirige l'axe visuel  $rv$  sur un point éloigné ; puis, on tourne l'instrument pour l'appuyer par les faces  $a$  et  $b$  des collets ; et si l'axe visuel rencontre alors le précédent point de mire : il se trouvera sensiblement parallèle au plateau  $ax$  et, par conséquent, aux faces  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ . Mais, quand la nouvelle position de l'axe visuel  $rv'$  s'écartera du point de mire : on lui fera parcourir la moitié apparente de cet écart, au moyen du bouton micrométrique  $n$  ; pour recommencer, ensuite, l'expérience avec l'axe visuel modifié : en s'adressant à un autre point de direction, ou en conservant le premier point de mire si le plateau  $ax$  peut avoir un

léger mouvement de bascule qui ramène  $ro''$  à ce point. Et l'on arrivera, bientôt, à un axe visuel rencontrant le même point de mire, dans les deux positions renversées de son tuyau.

Si, maintenant, on donne le même appui  $ab$  au tuyau d'épreuve et à la base d'une alidade, et qu'on amène l'axe visuel de cette alidade sur un point *éloigné* visé par le tuyau d'épreuve: au moyen d'une vis  $t$  communiquant au micro-mètre (*fig.* 69), ou en inclinant convenablement le tuyau d'alidade (*fig.* 70, 82) que l'on fixera, ensuite, à son montant en serrant la vis  $p$ ; on aura établi l'axe visuel de ce tuyau parallèlement au plateau d'appui, et, par conséquent, à la base  $ab$  de l'alidade.

L'axe visuel d'un tuyau cylindrique pourra, aussi, être réglé parallèlement à son appui: en le faisant tourner dans ses collets que l'on ne sera pas, alors, obligé de renverser, § 274 (*fig.* 107).

161. Pour que l'axe visuel d'une alidade plongeante décrive un plan, pendant la rotation du tuyau autour de sa charnière, il faut qu'il soit perpendiculaire à cette dernière. Autrement, tous les points dudit axe décrivant des arcs dans des plans perpendiculaires à la charnière, cet axe engendrerait une surface courbe, connue sous le nom d'hyperboloïde continu.

Il sera facile d'établir l'axe visuel d'une alidade perpendiculairement à la charnière de son tuyau, par de légers déplacements de l'objectif de ce tuyau.

En effet, je pose l'alidade sur un plateau, et, dirigeant l'axe visuel  $xv$  (*fig.* 73) sur un point éloigné  $s$ , je marque la direction  $xn$  de la ligne de foi  $ab$ . Je retourne, ensuite, l'alidade bout-pour-bout sur cette direction, c'est-à-dire que j'en appuie la ligne de foi de l'autre côté de  $xn$ , en  $b'a'$ ;  $xv$  vient en  $vr$ , et, pour viser le même lieu de l'espace, je ramène, par une demi-révolution du tuyau sur sa charnière, le point  $r$  en  $r'$ :  $v$  prend alors la position  $v'$  et l'axe visuel  $rv$ , devenu  $r'v'$ , se trouve maintenant dirigé sur un lieu  $s'$

différent de  $s$ . L'inclinaison  $rvv'$  de  $rv$  sur le plan  $vv'$ , perpendiculaire à la charnière  $pg$ , occasionnera, par le retournement de l'alidade, une déviation angulaire  $rov'$  double de  $rvv'$ . On détruira donc celle-ci : en faisant mouvoir l'objectif  $v'$ , de manière à diviser l'espace  $ss'$  en deux parties paraissant égales, ce qui donne à l'axe visuel la position  $r'r'$ . Et, pour s'assurer si cette correction est convenable, on dirigera le nouvel axe visuel sur le point  $s$  déjà visé, on tracera, comme primitivement, la ligne de foi sur laquelle on retournera la base de l'alidade ; et l'on ramènera, par une demi-révolution du tuyau, l'axe visuel sur  $s$  : la coïncidence ayant lieu,  $rr'$  n'aura pas quitté le plan perpendiculaire à l'axe de rotation ; sinon, on dérangera, de nouveau, l'objectif qu'on vérifiera par un autre retournement, jusqu'à ce que l'axe visuel soit réglé.

162. Le plan de plongée de l'axe visuel d'une alidade sera perpendiculaire à sa base : quand la charnière du tuyau se trouvera parallèle à cette base.

Pour vérifier cette disposition, on s'assurera d'abord si l'axe visuel est perpendiculaire à la charnière ; puis, on appuiera l'alidade sur un plateau dressé horizontalement, § 272. On dirigera, ensuite, l'axe visuel sur une verticale, telle qu'un peuplier ou l'arête d'un bâtiment, et l'on donnera à cet axe visuel toutes les plongées possibles ; le plan qu'il décrira sera vertical et, par conséquent, perpendiculaire au plateau ainsi qu'à la base de l'alidade : quand, dans sa rotation, ledit axe visuel rencontrera constamment la verticale de mire. Dans le cas contraire, il faudra modifier l'assemblage de la charnière sur le montant, ou celui du montant sur la base.

163. Le soin, que l'on doit apporter à la vérification ou au perfectionnement d'une alidade, dépendant de la précision avec laquelle on veut marquer les directions que l'on vise ; il sera utile de connaître le plus ou moins d'importance des recommandations précédentes, et, pour cela, nous chercherons l'erreur d'observation produite :

1.<sup>o</sup> Par le défaut de parallélisme de l'axe visuel d'une alidade avec le plan de sa base, lorsque son tuyau y sera attaché.

2.<sup>o</sup> Par le défaut de perpendicularité de l'axe visuel sur la charnière d'un tuyau plongeant.

3.<sup>o</sup> Par le non-parallélisme de cette charnière avec le plan de la base.

Le premier défaut de parallélisme influera sur l'observation d'un angle : en ce que, son plan n'étant pas parallèle à celui du limbe, il faudra corriger la graduation donnée sur ce limbe, pour reproduire celle de l'angle des rayons visuels. Cependant, comme cette correction sera souvent très petite, à cause du peu d'étendue du micromètre des tuyaux visuels, on pourra la négliger dans beaucoup de circonstances, et se dispenser de recourir au tuyau d'épreuve.

164. Pour trouver l'erreur produite par la non-perpendicularité de l'axe visuel d'une alidade plongeante sur la charnière de son tuyau : prenons pour plan de projection, celui conduit suivant cette charnière  $xy$ , perpendiculairement au plan  $un$  du micromètre (*fig. 74*) ou de la face de l'objectif (*fig. 75*); et soient  $abc$  la section du tuyau par ce plan,  $v$  l'objectif et  $r$  l'oculaire. En inclinant l'axe visuel sur le plan de projection, de la quantité  $g'og = i$ , le point  $r$  décrira un arc  $gg'$  dans le plan  $rg$ , le point  $v$  décrira l'arc  $ss'$  dans le plan  $fp$ , l'oculaire se projettera en  $r'$  et l'objectif en  $v'$ ;  $r'v'$ , qui sera la projection de la nouvelle position de l'axe visuel, déviara de  $rv$ , d'une quantité angulaire  $\omega$  représentant l'erreur de projection due à la plongée  $g'og$ . Appelons  $\Delta$  la distance  $fv$  de l'oculaire au plan du micromètre ou de l'objectif  $un$ , et  $a$  la distance  $rf$ .

L'angle de  $r'v'$  avec  $rv$  est la différence des inclinaisons de ces droites sur  $fp$ , c'est-à-dire :  $\omega = (r'v'e - rvf)$ . Or,

$$\operatorname{tg} r'v'e = \frac{r'e}{v'e}, \quad r'e = rf = a, \quad v'e = s't = g's' \cos i = \Delta \cos i.$$

$$\text{Ainsi, } \operatorname{tg} r'v'e = \frac{a}{\Delta \cos i}, \quad \text{d'ailleurs, } \operatorname{tg} rvf = \frac{rf}{vf} = \frac{a}{\Delta};$$

$$\text{donc, } \operatorname{tg} \omega = \frac{\frac{a}{\Lambda \cos i} - \frac{a}{\Lambda}}{1 + \frac{a^2}{\Lambda^2 \cos i}} = \frac{\Lambda a (1 - \cos i)}{a^2 + \Lambda^2 \cos i}.$$

Cette formule, qui est indépendante de la position de la charnière, montre que  $\omega$  diminuera avec le rapport  $\frac{a}{\Lambda}$ , pour certaines limites de  $i$  qu'il importe, alors, de déterminer. A cet effet, supposons que  $\omega$  devienne  $\omega'$  quand  $\Lambda$  devient  $\Lambda + k$ ,  $a$  étant invariable, et exprimons que  $\operatorname{tg} \omega'$  est plus petit que  $\operatorname{tg} \omega$  :

$$\text{Nous aurons : } \frac{(\Lambda + k) a (1 - \cos i)}{a^2 + (\Lambda + k)^2 \cos i} < \frac{\Lambda a (1 - \cos i)}{a^2 + \Lambda^2 \cos i} \text{ et, après réductions faites : } \cos i > \frac{a}{\Lambda} \frac{a}{(\Lambda + k)}.$$

Ainsi,  $\omega'$  sera moindre que  $\omega$  tant que  $i$  sera inférieur à l'angle, dont le cosinus vaut  $\frac{a}{\Lambda} \frac{a}{(\Lambda + k)}$  et, à plus forte raison,  $\frac{a^2}{\Lambda^2}$ ; condition d'autant mieux remplie que  $\Lambda$  sera plus grand par rapport à  $a$ .

En supposant d'ailleurs que, dans un tuyau visuel, la plus petite valeur de  $\Lambda$  soit  $2a$ , on aura pour limite :  $\cos i > \frac{1}{4}$ ,  $\sin \frac{i}{2} < \frac{3}{5}$  ou  $i < 82^\circ$ . Et comme, dans les observations géodésiques, il ne se présente jamais de différence de plongées plus grande que  $82^\circ$ , on conclura que les erreurs d'observation  $\omega$ ,  $\omega'$ ..., provenant des diverses plongées d'une alidade non réglée, seront d'autant moindres que l'oculaire et le micromètre du tuyau visuel sont plus éloignés l'un de l'autre.

165. Nous aurons la limite des plongées  $i$ , pour lesquelles il ne sera pas nécessaire de régler l'axe visuel d'une alidade, perpendiculairement à sa charnière : en exprimant que l'angle  $\omega$  est inférieur à l'incertitude de lecture  $\varphi = \frac{p}{2n}$ . § 110 page 63, sur le limbe où marque la ligne

de foi, c'est-à-dire : par  $\cos i > \frac{a(\Lambda - a \operatorname{tg} \varphi)}{\Lambda(a + \Lambda \operatorname{tg} \varphi)}$ , transformable en  $\sin^2 \frac{i}{2} < \frac{\Lambda \operatorname{tg} \varphi}{2(\Lambda \operatorname{tg} \varphi + a)} + \frac{a^2 \operatorname{tg} \varphi}{2\Lambda^2(\Lambda \operatorname{tg} \varphi + a)}$  et encore,  $\sin^2 \frac{i}{2} < \frac{\Lambda \operatorname{tg} \varphi}{2(\Lambda \operatorname{tg} \varphi + a)}$ . Soit  $\varphi = 1^\circ$ , auquel cas  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{6364}$ ,

§ 54 page 25, et mettons  $z$  au lieu de  $\frac{\Lambda}{a}$ ; il viendra :

$$\sin^2 \frac{i}{2} < \frac{z}{2(z + 6364)}.$$

Supposons, pour premier exemple, que l'on emploie une alidade à tuyau (fig. 70), dont les facettes aient un centimètre de large; en mettant l'oculaire vers le milieu de sa facette, la plus grande déviation possible fournira  $a = 0^m,005$ ; supposons, aussi, que le tuyau soit long de trois décimètres, ou  $\Lambda = 0^m,3$ , alors  $\frac{\Lambda}{a} = z = 60$ ; et, en substituant dans la dernière expression, il vient:  $\sin^2 \frac{i}{2} < \frac{1}{214}$ ,  $\log. \sin \frac{i}{2} < 8,83479$ ,  $\frac{i}{2} < 4^s,35$  et  $i < 9^s$ .

Deuxième exemple: soit une alidade à lunette (fig. 82) où  $a = 0^m,002$ ,  $\Lambda = 0^m,03$ ; on aura  $z = 15$ ,  $\sin^2 \frac{i}{2} < \frac{1}{850}$ ,  $\log. \sin \frac{i}{2} < 8,53529$ ,  $\frac{i}{2} < 2^s,18$  et  $i < 4^s,36$ .

Ainsi: toute plongée, inférieure à  $9^s$  dans le premier exemple et à  $5^s$  dans le deuxième, ne produira pas d'erreur sensible dans la projection, à  $1^\circ$  près, d'une direction visée; et, comme les observations géodésiques, qui n'admettent pas d'incertitude angulaire excédant  $1^\circ$ , se font à des distances assez grandes pour que les différences de plongées du tuyau visuel ne dépassent pas  $5^s$ , il s'ensuit que l'on pourra souvent omettre de régler l'axe visuel d'une alidade, sans qu'il en résulte d'erreur appréciable.

S'il s'agit d'opérations graphiques, nous déterminerons l'angle  $\varphi$  à négliger, quand la distance visée  $D$  correspondra à la plus grande dimension  $d$  de la feuille, ce

qui donnera  $\frac{1^m}{10000}$  pour tangente à cet angle ; soit  $d = 0^m,5$ ,  
 $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{5000}$  et  $\varphi = 1',3$  qui se rapportera à l'usage de l'une  
ou de l'autre des alidades précédentes.

D'où il suit que, dans les observations géodésiques, il sera inutile de rendre l'axe visuel d'une alidade perpendiculaire à la charnière de son tuyau, en sorte que les fils réticulaires pourront être fixés audit tuyau.

166. Cherchons maintenant l'erreur d'observation, produite par le non-parallélisme de la charnière d'une alidade plongeante sur le plan de sa base.

Nous imaginerons, comme au § 162, que, la base de l'alidade étant posée sur un plateau horizontal, on fasse rencontrer successivement tous les points d'une verticale de mire par l'axe visuel ; la déviation verticale du plan de rotation de cette ligne nous obligera de mouvoir, à chaque plongée, la base de l'alidade dont la ligne de foi indiquera les déplacements horizontaux de l'axe visuel.

Soit pris pour plan horizontal de projection (*fig. 76*), celui qui contient la position horizontale  $rv$  de l'axe visuel, et désignons par  $tp$  et  $ed$  les projections horizontale et verticale de la charnière ;  $ea$ , perpendiculaire à  $ed$ , sera la trace verticale du plan de rotation, tandis que  $rv$  en sera la trace horizontale. Pendant les plongées du tuyau, le point  $t$  décrira, autour du point dont les projections sont  $b$  et  $p$ , une circonférence de rayon  $tb$  se projetant horizontalement selon l'ellipse  $tft'$ , qui a pour demi-axes principaux :  $pf = tb$ , et  $tp$  projection de  $tb$ . Les projections horizontales des positions de l'axe visuel seront toutes tangentes à l'ellipse  $tft'$  ; l'une quelconque  $r'a'$  fera, avec la position primitive  $rv$ , l'angle d'erreur  $a'cv$  qu'il faut déterminer.

$ca''$  est la nouvelle position de l'axe visuel dans le plan  $rva$  rabattu,  $t''$  est le rabattement de  $t'$ , et, en prenant  $t''v'' = tv$ ,  $t'r'' = tr$ , ce qui revient à faire  $cv'' = cv$ ,  $cr'' = cr$  ;  $v'$  et  $r'$



seront les projections horizontales des nouvelles positions de l'objectif et de l'oculaire.

Appelons  $\kappa$  l'inclinaison de la charnière  $ed$  sur l'horizon, ou la déviation verticale du plan de rotation,  $\alpha$  l'angle  $a'cv$ , et  $\gamma$  l'inclinaison  $a''cv$  donnée à l'axe visuel sur sa position horizontale : les triangles  $a'cv$ ,  $a'va$ ,  $a''cv$  fournissent :

$$\frac{cv}{a'v} = \frac{1}{\lg \alpha}, \quad \frac{a'v}{av} = \sin \kappa, \quad \frac{a''v}{cv} = \lg \gamma,$$

et ces trois équations multipliées entre elles donnent :  $\lg \alpha = \sin \kappa \lg \gamma$ .

L'angle  $\alpha$  augmente donc en même temps que  $\gamma$ , et devient appréciable pour de très petites plongées du tuyau visuel ; en sorte que la moindre inclinaison de la charnière d'une alidade, sur le plan de sa base, occasionnera de graves erreurs dans les observations.

167. Pour fendre cette conclusion sensible par un exemple : déterminons l'inclinaison  $\kappa'$  correspondante à une valeur de  $\alpha$  qui ne peut être appréciée sur un limbe, dans les limites de plongées du § 165. Soit  $\alpha = 5'$  répondant à une longueur graphique de 13 centimètres <sup>(1)</sup>, et prenons  $\gamma = 5''$ , nous aurons :  $\sin \kappa' = \frac{\lg 5'}{\lg 5''}$ ,  $\log. \sin \kappa' = 7,99911$  et  $\kappa' = 64'$ , qu'on

aurait trouvé immédiatement en écrivant :  $\kappa \frac{1'}{R} = \frac{5'}{5''} = \frac{1}{100}$

et  $\frac{1'}{R} = \frac{1}{6400}$ .

On voit donc que, avec une très petite plongée de l'axe visuel, la charnière du tuyau ne pourrait être inclinée sur le plan de la règle, de plus de 64 centigrades, sans occasionner une erreur appréciable numériquement ou graphiquement.

Ainsi, il faut et il suffit, pour qu'une alidade plongeante soit bonne, que la charnière de son tuyau visuel soit parallèle à sa base.

(1) La quantité angulaire, inappréciable graphiquement à une distance  $d$ , est donnée par  $\lg \alpha = \frac{1^m}{10000d}$  ; si  $\alpha = 5'$ ,  $d = \frac{1^m}{10000 \lg 5'} = 0^m,127$ .

## LES GONIOMÈTRES SIMPLES.

*Généralités.*

168. On mesure un angle : en déterminant l'espace décrit par la ligne de foi d'une alidade, quand son axe visuel a passé de l'un des côtés de l'angle à l'autre ; et l'on reconnaîtra cet espace sur un limbe circulaire, par la différence des arcs séparant un *rayon fixe* des positions successivement occupées par la ligne de foi de l'alidade.

Tout instrument angulaire, ou GONIOMÈTRE, contiendra donc une plaque pleine ou évidée (*fig. 77, 78, 82, 86, 87*) portant un limbe circulaire, numéroté de zéro à quatre droits, dont le centre servira de pivot à la base d'une alidade. Cette plaque sera montée sur un pied, de manière à s'établir dans un plan quelconque et à tourner dans ce plan.

169. La ligne fixe, destinée à comparer les positions de l'alidade, pouvant faire corps avec le limbe ou en être séparée ; il s'ensuit que l'alidade pourra se mouvoir indépendamment du limbe ou y être attachée. Dans le premier cas, le limbe restera immobile pendant le mouvement de l'alidade, et son rayon zéro servira de repère. En second lieu, ce sera par le déplacement du limbe, devenu base même de l'alidade, que s'exécutera l'observation angulaire ; et alors, l'alidade aura pour ligne de foi le rayon zéro du limbe. Ce zéro sera donc, dans toutes circonstances, l'origine des arcs séparant le rayon fixe, de chaque position prise par la ligne de foi de l'alidade.

C'est pourquoi, l'on distingue deux espèces de goniomètres : les uns à *limbe fixe* (*fig. 78*), le repère étant le rayon zéro du limbe et l'alidade *rvb* en étant séparée ; d'autres à *limbe mobile* (*fig. 87*), le repère fixe *cg* étant isolé du limbe

tandis que l'alidade *Efo* est attachée à ce limbe, en employant son rayon *zéro co* pour ligne de foi.

170. L'*index* d'un goniomètre marque l'espace parcouru par la ligne de foi de l'alidade; il appartient à cette ligne même dans le goniomètre à limbe fixe, et au repère fixe dans le goniomètre à limbe mobile

171. Un goniomètre sera *en station* : quand on pourra accomplir la mesure d'un angle par les seuls mouvements de son axe visuel rendu, avant tout, parallèle au limbe, suivant l'expérience du § 160 page 94. Cette pose en station consiste : 1.<sup>o</sup> à mettre en place l'instrument, en établissant le centre et le plan du limbe au sommet et au plan de l'angle ; 2.<sup>o</sup> à décliner le goniomètre, ou assujettir son repère à la direction fixe qu'il devra conserver pendant l'observation.

172. Donner un coup d'alidade suivant un alignement : c'est, le goniomètre étant en station, diriger l'axe visuel de l'alidade sur cet alignement, au moyen de la partie mobile du goniomètre, et reconnaître la graduation de l'*index*, qui termine alors le rayon commun à la partie fixe et à la partie mobile de l'instrument. Par suite, l'amplitude d'un angle vaudra la différence des graduations propres aux coups d'alidade donnés sur ses côtés, avec la même déclinaison ; cette mesure encourra donc une erreur de lecture double de celle du coup d'alidade.

173. Dans l'usage du goniomètre à limbe fixe : l'amplitude de chaque coup d'alidade, ou l'arc indiquant la position de la ligne de foi de l'alidade relativement au repère du goniomètre, après toute direction donnée à son axe visuel, a évidemment le sens de la numération du limbe vu par sa partie concave ; les angles, obtenus par la différence d'inclinaisons de même sens, § 51 page 22, auront donc, aussi, le sens de la numération du goniomètre à limbe fixe ; c'est-à-dire que : les numéros du limbe augmentant de droite à gauche (fig. 78), la graduation à soustraire appartiendra au coup d'alidade sur le côté droit désigné, alors, comme premier côté de l'angle, pendant que le côté gauche en sera le second côté.

174. L'emploi du goniomètre à limbe mobile rend le sens de l'arc, qui mesure chaque coup d'alidade, inverse à la numération du limbe vu par sa partie concave : parce que, supposant à cette numération le sens de *gauche à droite* (fig. 87), la graduation  $g$ , indiquée par le repère fixe après une direction imposée à l'axe visuel  $EF$ , sera l'inclinaison, dans le sens (gauche à droite) de numération du limbe, de ce repère sur le rayon zéro qui est la ligne de foi de l'alidade, § 169 ; cette graduation  $g$  mesurera donc l'inclinaison de la ligne de foi sur le rayon fixe, dans le sens (droite à gauche) inverse à la numération du limbe. Conséquemment, les angles, obtenus par la différence des coups d'alidade, auront un sens inverse à la numération du goniomètre à limbe mobile ; c'est-à-dire que, dans la numération de *gauche à droite*, le côté *droit* sera le *premier* côté de l'angle, ou celui dont le coup d'alidade fournira la graduation à soustraire.

175. Nous avons supposé, § 168 page 102, que l'axe visuel et la ligne qui porte l'index d'un goniomètre passaient par le centre de son limbe ; mais, comme il est très difficile, sinon impossible, de satisfaire à ces conditions et de les conserver : il faut déterminer les erreurs que l'excentricité de ces lignes peut introduire dans chaque coup d'alidade, afin de corriger les résultats obtenus avec l'instrument décentré.

Et d'abord, pour trouver l'erreur due à l'excentricité  $eq = r$  de l'axe visuel  $rv$  (fig. 71) : dirigeons cet axe sur un point  $f$  que nous supposons joint au centre  $c$  ; le petit angle  $r/c$ , ayant  $\frac{r}{cf}$  pour sinus et  $\frac{r}{cf} 64^s$  pour amplitude, § 54 page 25, sera la correction propre à la graduation du coup d'alidade donné sur  $f$ .

On voit que cette correction deviendra négligeable : quand elle sera inférieure à l'inexactitude de lecture  $\frac{1}{2}^{\text{cent}}^s$  sur le limbe, ou que la distance  $cf$ , du point de mire  $f$  au centre  $c$  de l'instrument, dépassera  $6400 \frac{r}{\varphi}$  ; en supposant, par exemple,  $r = 0^m,05$ ,  $\varphi = 1$ , on aura :  $cf > 300^m$ .

Ainsi, les coups d'alidade, donnés à des distances convena-

bles, c'est-à-dire, plus grandes que  $6400 \frac{\epsilon}{\varphi}$ , seront indépendants de l'excentricité de l'axe visuel; et c'est ce qui a le plus ordinairement lieu dans les observations géodésiques, où cette excentricité pourra, même, être de  $\frac{m^m}{10000}$  sans nuire

à l'exactitude des résultats graphiques,  $\frac{1}{m}$  étant l'échelle de description, § 7 page 2; car alors,  $\sin \varphi$  a pour valeur  $\frac{1^m}{10000} : \frac{cf}{m}$ . Il est évident, aussi, qu'une erreur de pointé, inférieure à  $\frac{m^m}{10000}$ , n'influera pas sur la direction graphique correspondante.

176. Quant à l'excentricité de l'index du goniomètre, on y aura égard de la manière suivante :

L'axe visuel  $rv$  (fig. 71) ayant été dirigé sur un point  $f$  assez éloigné pour que l'excentricité  $eq$  ne produise pas d'effet appréciable: soit  $g$  la graduation désignée par l'index  $b$  de la droite  $yb$ , considérée, § 170 page 103, comme ligne de foi de l'alidade dans le goniomètre à limbe fixe, ou comme ligne de repère du goniomètre à limbe mobile; et supposons que cette ligne s'appuie sur le limbe, par un second index  $a$  marquant la graduation  $g'$ .

L'inclinaison  $byo$  de  $ab$  sur le rayon zéro  $co$ , c'est-à-dire, l'amplitude du coup d'alidade  $rf$ , ayant son sommet  $y$  entre le centre et la circonférence du limbe, aura pour mesure  $\frac{\text{arc } ob + \text{arc } o'a}{2}$ ; mais  $\text{arc } ob = g$ ,  $\text{arc } o'a = g' - 2^d$ , donc

la graduation  $\gamma$  du coup d'alidade vaudra  $\frac{g + g' - 2^d}{2}$ : et l'erreur d'excentricité, qu'il faudra ajouter à la graduation  $g$  de l'index  $b$  pour la rendre propre au coup d'alidade, sera  $\gamma - g = \frac{(g' - g) - 2^d}{2}$ .

Lorsque la ligne  $by$  n'aura pas de second index  $a$ ; on y suppléera: en retournant, bout-pour-bout, l'axe visuel de  $rv$  en  $r''v''$ , pour donner, sur le point de mire primitif  $f$ , un nouveau coup d'alidade qui retournera aussi, bout-pour-

bout, la ligne de foi  $yb$  en  $yg'$  dans le goniomètre à limbe fixe, ou la corde  $gg'$  du limbe mobile; tellement que la graduation  $g'$  viendra correspondre à l'index  $b$ . Et si, dans cette dernière expérience, le tuyau visuel ne pouvait se retourner bout-pour-bout sur son support: il faudrait choisir un point de mire  $n$  aligné en arrière de  $cf$ , puis donner des coups d'alidade sur les directions  $cf$ ,  $cn$ , pour avoir  $g$  et  $g'$ .

177. On reconnaitra que l'index d'un goniomètre appartiendra à un rayon de son limbe: quand la correction  $\frac{(g'-g)-2^d}{2}$ , due à l'excentricité de cet index, sera nulle par  $g'-g=2^d$ . Et si, en une même station, on éprouve cette circonstance pour deux coups d'alidade différents, on conclura que le goniomètre est bien centré.

178. D'après cela, pour obtenir la mesure d'un angle  $z$  avec un goniomètre décentré qui aura deux index  $b$  et  $a$  (fig. 71 et 87): supposons que ces index marquent les graduations  $g, g'$  au coup d'alidade sur le 1.<sup>er</sup> côté de l'angle, et  $g, g'$  au coup d'alidade sur le 2.<sup>e</sup> côté, on aura:

$$\text{graduation du 1.<sup>er</sup> coup d'alidade} = \frac{g + g' - 2^d}{2}$$

$$\text{graduation du 2.<sup>e</sup> coup d'alidade} = \frac{g + g' - 2^d}{2}$$

$$\text{et angle observé } z = \frac{g-g}{2} + \frac{g'-g'}{2}$$

179. Afin de s'assurer que la déclinaison d'un goniomètre n'est pas changée, ou que son repère est resté fixe, pendant l'observation angulaire; et pour rétablir, au besoin, la position primitive de ce repère: on attache à celui-ci un tuyau-visuel-déclinateur, que l'on dirige d'abord sur un point auxiliaire, pour l'y maintenir ensuite à chaque coup d'alidade, ou l'y ramener, par le mouvement général de l'instrument.

Ainsi (fig. 78), le goniomètre devant être à limbe fixe: son alidade aura pour tuyau visuel  $rv$  et pour base la règle  $cb$ , dont le point  $b$  sera l'index du goniomètre, § 170 p. 103,

tandis qu'un second tuyau visuel  $r'v'$  fera corps avec le limbe pour en garantir l'immobilité. Et, si le limbe du goniomètre doit être mobile en servant de base à l'alidade: le tuyau visuel  $r'v'$ , toujours attaché au limbe, deviendra celui de l'alidade, pendant que le tuyau visuel  $rv$  sera déclinateur pour maintenir la position primitive du repère  $cb$ , dont l'extrémité  $b$  sera encore index du goniomètre.

On voit que, à l'aide du second tuyau visuel, le goniomètre peut avoir, à volonté, son limbe fixe ou mobile, sans changer d'index; toutefois, il est préférable de conserver le limbe fixe, parce qu'on fait mouvoir plus facilement l'alidade quand elle a pour base une simple règle, que lorsqu'elle tient au limbe.

180. On évitera de recourir à un alignement auxiliaire pour décliner un goniomètre, et l'on abrégera, par conséquent, une observation angulaire: lorsqu'on connaîtra préalablement la graduation du coup d'alide suivant la direction de l'axe-visuel-déclinateur. Car, l'appui de cet axe visuel, sur un côté de l'angle, remplacera le coup d'alidade propre à ce côté, tout en assurant l'immobilité du repère pendant l'observation du coup d'alidade sur l'autre côté. Et, quand on pourra diriger en même temps, sur un point convenablement éloigné § 175, l'axe visuel de l'alidade et l'axe-visuel-déclinateur établi, pour cela, parallèlement au limbe: l'index marquera, aussitôt, la graduation cherchée.

181. Mais, lorsque l'assemblage des tuyaux visuels à la plaque du goniomètre s'opposera à ce qu'ils soient dirigés simultanément sur le même point: on interceptera un angle connu  $z$ , par les deux axes visuels du goniomètre; et si  $g''$ , ou  $g$ , est la graduation alors marquée par l'index du goniomètre, tandis que la graduation  $x$  sera attribuée au coup d'alidade suivant l'axe-visuel-déclinateur: on aura  $g'' - x = z$ , ou  $x - g = z$ , selon que cet axe-visuel-déclinateur aura été dirigé sur le premier, ou le second côté de l'angle  $z$ .

Quant à l'amplitude de cet angle, elle résultera de sa me-

sure par la méthode primitive, § 179 : consistant à décliner le goniomètre sur un alignement auxiliaire, et à donner les coups d'alidade  $g'$ ,  $g''$  sur les côtés de l'angle  $z$ , pour en conclure la graduation ( $g'' - g'$ ).

182. Les deux observations  $g'' - x = z$ ,  $x - g = z$ , qui fournissent, chacune, la valeur de  $x$ , produisent les résultats  $2x = g'' + g$ , et  $2z = g'' - g$ , indépendants de l'ordre suivi dans ces observations. D'où l'on voit que, si l'on embrasse, deux fois de suite, le même angle  $z$  par les axes visuels d'un goniomètre : en déclinant ce goniomètre alternativement sur chacun des côtés dudit angle (fig. 80, 81), les deux graduations  $g$ ,  $g''$ , successivement marquées par l'index  $b$ , donneront : 1.<sup>o</sup> par leur somme ( $g'' + g$ ), la double-graduation du coup d'alidade  $x$  propre au tuyau-visuel-déclinateur ; 2.<sup>o</sup> par leur différence ( $g'' - g$ ), la double-amplitude de l'angle intercepté  $z$ .

183. On reconnaitra, aussi, que les résultats  $x - g = z$ ,  $g'' - x = z$  proviennent de la double-observation d'un angle avec le goniomètre dont le limbe, rendu successivement fixe et mobile, a été décliné sur le même côté de cet angle.

En effet, le limbe devant d'abord rester fixe, l'angle  $ncg$  (fig. 80) sera intercepté par le fait de la déclinaison  $r'v'$  sur le second côté  $cg$  et du coup d'alidade  $g$  suivant le premier côté  $cn$  ; ensorte que,  $x$  étant la graduation du coup d'alidade imaginé selon  $r'v'$ , on aura  $x - g = z$ .

Le limbe devenant mobile, par le choix de  $rv$  pour axe-visuel-déclinateur ; l'angle  $gcd$  (fig. 81) sera intercepté : en appuyant, encore, la déclinaison  $rv$  sur  $cg$  devenu le premier côté, et dirigeant l'axe visuel  $r'v'$  de la nouvelle alidade selon le second côté actuel  $cn$ , pour faire marquer la graduation  $g''$  par l'index  $b$ . Et,  $x$  étant toujours la graduation de cet index, correspondante à la coïncidence des deux axes visuels  $rv$ ,  $r'v'$  ; il viendra :  $g'' - x = z$ .

La double-mesure d'un angle s'obtiendra, donc, par l'emploi du goniomètre avec son limbe rendu successivement



fixe et mobile, pourvu que les excentricités des axes visuels restent négligeables.

184. Lorsque chaque axe visuel, ou seulement l'un d'eux, sera mobile sur son support : on pourra régler l'axe-visuel-déclinateur à une graduation désignée  $b$ , c'est-à-dire, assigner cette graduation au coup d'alidade dirigé suivant ledit axe.

En effet, si rien ne s'oppose à la direction simultanée des axes visuels  $rv$ ,  $r'v'$  (*fig.* 78) sur un même point *convenablement* éloigné ; on opérera cette coïncidence, par les déplacements de ces axes visuels sur leurs supports particuliers, après avoir arrêté l'index du goniomètre à la graduation  $b$ . Et, dans le cas où l'on ne pourra superposer les axes visuels : l'observation préliminaire de l'angle  $z$  fera connaître la graduation  $g'' = (b + z)$ , ou  $g = (b - z)$ , que devra couvrir l'index, pour que, l'axe visuel de l'alidade étant sur l'un des côtés de l'angle  $z$ , celui du repère, dirigé suivant l'autre côté, corresponde à la graduation désignée  $b$ .

Ainsi, pour régler l'axe-visuel-déclinateur d'un goniomètre à la graduation particulière *zéro* : on fixera l'index sur la graduation  $z = (g' - g)$  précédemment trouvée ; et, à l'aide des mouvements d'assemblage des tuyaux visuels sur leurs supports, on dirigera l'axe visuel de l'alidade suivant le second côté de l'angle  $z$ , pendant que le premier côté de cet angle recevra la direction de l'axe-visuel-déclinateur.

Il est bien entendu que ce réglage appartiendra, seulement, aux observations appuyées sur des distances *convenablement* grandes, c-à-d, supérieures à  $6400 \frac{e}{\varphi}$ , § 175 page 104,  $e$  étant la somme algébrique des excentricités des axes visuels, et  $\varphi$  le nombre des centigrades négligés à la lecture du limbe.

185. Nous terminerons les généralités sur les goniomètres, en montrant comment ils servent à reporter ou à jalonner sur le terrain une direction  $cf$ , inclinée d'une amplitude connue  $z$  sur un alignement donné  $ca$ , et dans un sens déterminé

(fig. 89). Après avoir stationné le goniomètre au sommet  $c$  de l'angle  $z$ , § 171 page 103 ; on dirigera , sur l'alignement donné  $ca$ , un coup d'alidade fournissant la graduation  $g$  ; et, supposant que  $x$  soit la graduation propre au coup d'alidade suivant la direction à signaler, on aura  $x - g = z$  ou  $g - x = z$ , selon que  $ca$  sera le premier ou le second côté de l'angle  $z$ , d'après le sens de cet angle relativement à la numération du limbe. En sorte que, la déclinaison du goniomètre ne changeant pas et son index étant amené sur la graduation  $x$  qui vient d'être déterminée, l'axe visuel de l'alidade se trouvera sur la direction voulue, qu'il sera facile de jalonner.

Par exemple : la direction cherchée devant être à droite de l'alignement donné  $ca$ , à partir du point  $c$ , et le goniomètre étant numéroté de droite à gauche ; s'il est à limbe fixe,  $ca$  sera le second côté de l'angle et l'on écrira  $g - x = z$  ; tandis que, si le goniomètre est à limbe mobile,  $ca$  sera le premier côté et l'on aura  $x - g = z$ . On obtiendra donc, en tous cas, une valeur de  $x$  que l'on couvrira par l'index du goniomètre, pour signaler ensuite, sur la direction visuelle de l'alidade, un point de l'alignement  $cf$  qui fera avec  $ca$ , et à sa droite, angle  $acf = z$ .

Si le tuyau-visuel-déclinateur était réglé à zéro : il suffirait de mettre l'index à la graduation de l'angle  $z$ , pour que l'axe-visuel-déclinateur, ou celui de l'alidade, étant dirigé sur le côté donné  $ca$  par le mouvement déclinaire du limbe, l'autre axe visuel se trouve en direction du côté cherché  $cf$ .

#### *Le Cercle astronomique.*

186. Ces principes étant posés ; examinons les divers goniomètres auxquels on devra recourir, selon les circonstances.

La construction d'un goniomètre est perfectionnée, en raison de l'exactitude qu'on attend de cet instrument. Pour les observations délicates, les mouvements brusques et lents

des parties du goniomètre sont facilités par des pinces à vis de pression et de rappel ; des lunettes à longue portée servent de tuyaux visuels, et chaque index est accompagné d'un vernier, garni quelquefois d'une loupe qui en favorise la lecture.

Le goniomètre le plus parfait, que l'on désigne sous le nom de CERCLE ASTRONOMIQUE, se compose ainsi qu'il suit :

*cq* (fig. 78) est un axe ou cylindre d'acier assemblé perpendiculairement au rouet *pob*, sur la face duquel est tracé le limbe, dont le centre *c* correspond, le plus possible, au pivot d'une règle *ab*, servant d'appui à la lunette *rv* et armée de deux index *b*, *a* pour corriger, au besoin, son excentricité, § 176. Le support de la lunette *r'v'* frotte sur le revers du rouet, tangentielllement à l'axe *cq*, et la gorge de ce rouet est assez large, pour que les pinces des vis de rappel *p*, *p'*, adaptées aux supports des lunettes, ne puissent se toucher pendant leurs mouvements ; à l'extrémité *q* de l'axe ou essieu *cq*, est soudé un contre-poids en forme de tambour. Le même axe peut tourner dans une enveloppe en cuivre, sur laquelle sont vissés deux tourillons *nx*, *xn'*, prolongements l'un de l'autre par le centre de gravité du système décrit.

Le pied de l'instrument est formé d'une colonne en acier y fixée à un plateau *uzd*, auquel tiennent trois branches traversées à leurs extrémités par des vis d'appui *e*, *f*, *g*. Cette colonne s'emmanche dans une enveloppe en cuivre bien calibrée, au chapiteau de laquelle se visse une fourche *ns s'n'*, dont les extrémités *n*, *n'* sont échancrées pour recevoir les tourillons *nx*, *xn'*. A la base de la colonne-enveloppe, est soudée une règle, garnie d'une pince *u* destinée à arrêter le mouvement de cette enveloppe autour de son axe, et terminée par un index *d*.

Une des bases du tambour *q* est dentée, pour engrener avec une vis sans fin *t* qui se rattache à l'enveloppe de l'axe *cq* ; tandis que, au tourillon *xn*, est fixée une plaque évidée, ou quart de cercle *k*, frottant sur la jone *ns* de la fourche,

que traverse une vis de pression  $\pi$  dont la pince, armée d'une vis de rappel  $t'$ , ralentit ou arrête le mouvement du système autour de  $nn'$ .

C'est avec un solide tabouret qu'on exhausse le cercle sur le sol de station.

187. Pour mettre ce goniomètre en place : on fera d'abord occuper le point de station par le centre du limbe, dont on établira, ensuite, le plan dans celui de l'angle à mesurer, par le procédé suivant :

Les axes visuels des lunettes ayant été préalablement rendus parallèles au limbe, par les essais du § 160 page 94, ou avec l'expérience du § 283; on disposera à première vue, dans le vertical d'un des côtés de l'angle, l'une des branches  $e$  et la fourche  $nn'n'$ , par une rotation imprimée à l'enveloppe de la colonne  $y$ , que l'on arrêtera aussitôt en serrant la pince  $u$ . On dirigera ensuite, sur ce côté, l'axe visuel  $rv$  de l'une des lunettes, en l'inclinant convenablement au moyen de la vis  $e$ , et même des autres vis  $f$  et  $g$ ; l'axe  $nn'$  se trouvera, ainsi, parallèle au côté considéré. Après cela, on fera basculer le plan du limbe autour de  $nn'$ , jusqu'à ce que l'axe visuel  $r'v'$  de l'autre lunette passe par le second côté de l'angle, et l'on serrera la pince  $\pi$ . Cette rotation ayant pu déranger l'axe visuel  $rv$  de la direction qu'on lui avait d'abord donnée: on le ramènera sur le premier point de mire, par un léger mouvement de la vis  $e$ ; puis, on vérifiera si  $r'v'$  est resté sur le second point de mire; et, dans le cas contraire, on l'y remettra à l'aide de la vis de rappel  $t'$ , produisant un faible mouvement de rotation autour de  $nn'$ .

### *Le Graphomètre.*

188. Lorsqu'il s'agit d'opérations secondaires, le goniomètre est moins compliqué : son limbe, réduit à une demi-circconférence (fig. 77), s'établit approximativement dans un plan désigné, au moyen d'un genou  $ne$ , accroché sous le

centre de gravité  $n$  de la plaque et susceptible de pivoter autour d'un axe  $nq$ . L'index  $b$  n'a pas toujours un vernier, et les axes visuels  $rv$ ,  $r'o'$  sont souvent formés par de simples pinnules. Tel est le GRAPHOMÈTRE, improprement nommé et d'un usage peu recommandé, § 202 page 118.

### *La Planchette.*

189. Dans les observations de détail, on se borne, même, à engager l'axe de rotation ou essieu  $cq$  de la plaque du goniomètre, dans une espèce de *moyeu* (fig. 84), auquel s'assemblent les branches  $d$ ,  $u$ ,  $g$  du trépied, dont l'écartement variable suffit pour établir la plaque dans une inclinaison voulue. Et, quand le goniomètre doit conserver son limbe fixe, l'alidade  $rvb$  s'enlève de la plaque pour y être posée à volonté; c'est alors qu'on donne à l'instrument le nom de **PLANCHETTE**, dont la construction et l'usage sont particulièrement traités aux § 226 et suivants, page 130.

### *Le Théodolite.*

190. On fera marquer, à un goniomètre, les angles réduits à l'horizon: en en faisant plonger les tuyaux visuels; mais il faudra dresser et maintenir sa plaque bien horizontale, § 272, pour que les plans de rotation des axes visuels restent verticaux, § 167 page 101. Le cercle astronomique à lunettes plongeantes prend le nom de **THÉODOLITE**, dont on fait rarement usage, à cause de la difficile conservation de son limbe dans une position horizontale.

### *La Boussole.*

191. La direction constante que prend, *d'elle-même*, l'aiguille aimantée en équilibre sur la pointe d'un pivot, peut la faire servir de repère à un goniomètre. En effet, si on plante le pivot  $en$  sur la plaque du goniomètre (fig. 77, 82 et 87) et qu'on dispose l'aiguille parallèlement à cette plaque, à

l'aide d'un curseur  $k$  changeant à volonté son inclinaison magnétique, on reconnaîtra la position de cette aiguille sur la plaque, soit par sa trace  $ef$  (fig. 82), soit par la graduation  $g$  que couvrira l'une de ses pointes (fig. 77 et 87) : et alors, l'immobilité du limbe sera assurée en conservant la ligne  $ef$  (fig. 82), ou le rayon  $g$  (fig. 77, 87), sous l'aiguille ; ou bien, l'une des extrémités de cette aiguille servira d'index fixe, pour marquer les graduations propres aux coups d'alidade, quand le goniomètre sera à limbe mobile.

On nomme **BOUSSOLE** le goniomètre dont le repère se fixe de lui-même, c'est-à-dire, dans lequel l'aiguille aimantée remplace le tuyau-visuel-déclinateur, § 179 page 106.

192. Afin de transporter facilement l'aiguille aimantée, et de l'adapter, à volonté, à la plaque d'un goniomètre : on la renferme, sur son pivot, dans une boîte  $ABC$  ou  $a'd'e'$  (fig. 82) fermée par un verre qui préserve cette aiguille des agitations atmosphériques ; un point du contour intérieur de la boîte sert de repère à ladite aiguille ; et, pour que cet appareil, devenu un **DÉCLINATOIRE**, soit regardé comme tenant à la plaque du goniomètre, sans y être soudé ni vissé, on lui fait occuper la même place remarquée, d'abord, par plusieurs points de son contour extérieur, ou, seulement, par le *plus grand côté*  $a'd'$  de ce contour.

193. La déclinaison, que l'aiguille aimantée procure aux goniomètres, n'est cependant assurée qu'aux limites indiquées par la longueur de cette aiguille ; car, pour rester libre, celle-ci ne doit toucher aucune partie de sa boîte, ce qui prie d'un vernier l'index du goniomètre. On distinguera donc assez imparfaitement le point du limbe couvert par cet index, pour douter si la déclinaison convient à des distances qui excéderont graphiquement le diamètre, ou même le rayon, terminé par ledit index.

Ce sera, par conséquent, aux seules observations de détail, qu'on emploiera avec confiance la déclinaison de l'aiguille aimantée ; aussi, destine-t-on ordinairement la boussole à mesurer les angles entre des plans verticaux : par son

alidade plongeante et au moyen de l'horizontalité préliminairement imposée à son aiguille, qui sert alors de niveau spontané pour caler horizontalement le limbe, § 272, 273.

194. La boussole comprendra donc un limbe, un déclina-toire et une alidade. Elle sera à limbe mobile, quand (fig. 77, 87) le pivot *a* de l'aiguille isolée *cg* occupera le centre du limbe, dont le rayon *zéro* servira de ligne de foi à l'alidade, § 169; elle sera à limbe fixe, lorsqu'une même trace de la plaque devra rester sous l'aiguille (fig. 77, 82) pendant que la ligne de foi de l'alidade parcourra les rayons du limbe.

Et, attendu que cette boussole à limbe fixe se déclinera spontanément, comme la boussole à limbe mobile, si on attache son aiguille au limbe, alors équilibré sur l'extrémité du pivot (fig. 86, 88); il sera avantageux de lui donner cette faculté.

195. La boussole se forme (fig. 86, 87) d'une boîte portant des pinnules *E*, *F*, ou un tuyau visuel plongeant *av*, et sur le fond de laquelle s'élève le pivot *ac* d'une aiguille aimantée assujettie à l'horizontalité; la pointe *c* du pivot est au centre d'un limbe. Un verre couvre cette boîte, qui s'accroche au genou *TE* (fig. 85) emmanché, par sa douille *EF*, au trépied *FNBC*.

Le limbe tient à la boîte (fig. 87), ou à l'aiguille (fig. 86): selon que le goniomètre est à limbe mobile, ou à limbe fixe.

L'excentricité  $\frac{m''}{10000}$ , que peut avoir, sans inconvénient § 175, l'axe visuel d'une boussole, permet d'en placer le tuyau visuel contre une face latérale de la boîte (fig. 87); ce qui rend plus commodes les plongées et le retournement bout-pour-bout de ce tuyau.

Un ressort *za* sert à écarter l'aiguille de la pointe de son pivot, pendant le transport de l'instrument: en pressant, contre le verre, la chappe *c* de cette aiguille.

On utilise quelquefois le couvercle *qr* de la boîte, comme support de la boussole (fig. 87), au moyen d'un

écrou  $\gamma$ , auquel on visse le manche  $sy$  de la douille, ou le montant  $efqr$  (fig. 88).

196. Dans la boussole à limbe fixe (fig. 86, 88), l'index  $b$  afferme le limbe, dont la plaque doit être très légère pour moins fatiguer la pointe  $c$  du pivot qui la soutient en équilibre.

Cet instrument devient propre aux observations *à la main* : en adaptant, sous l'oculaire, un petit miroir devant réfléchir à l'œil la graduation marquée par l'index en même temps qu'on visera une direction. Les parties inférieures de la figure 86 représentent les coupes de l'instrument suivant son limbe et le plan de plongée de son axe visuel; chaque division  $ge$  du limbe paraissant en  $g'e'$  dans le miroir  $ur$ , les numéros de ce limbe seront écrits à contre-sens pour que leurs images soient vues dans le sens naturel.

197. Pour que l'aiguille aimantée soit arrasée par le bord du déclinatoire, dans toutes les positions de ce dernier, il faut en établir le fond parallèlement au plan d'oscillation de l'aiguille. A cet effet, on met en coïncidence un rayon quelconque  $g$  du limbe avec cette aiguille (fig. 87) ou avec l'index  $b$  de la boîte (fig. 86), au moyen de la bascule du genou qui supporte ladite boîte; puis, on fait tourner cette boîte sur l'essieu  $nq$  de la griffe  $\pi r$  (fig. 85) de manière à couvrir, avec l'aiguille ou avec l'index, la graduation ( $1^d + g$ ) qu'on rapprochera ensuite de cet index, par un nouveau mouvement de bascule, qui, étant sensiblement perpendiculaire au rayon  $g$ , changera peu la direction de ce dernier; en sorte que, les deux rayons  $g$  et ( $1^d + g$ ), ayant coïncidé successivement avec l'index, les autres rayons du limbe arraseront tour-à-tour ledit index, pendant la rotation de la boîte sur l'essieu du genou, quand cet essieu demeurera perpendiculaire à la griffe qui accroche le genou au fond du déclinatoire.

Et, si l'aiguille aimantée a d'abord été horizontalement équilibrée, § 273, le fond et l'appui du déclinatoire deviendront horizontaux.

198. En donnant au déclinatoire la double suspension en



équerre représentée par la figure 88 : son fond prendra spontanément la position horizontale ; et il suffira d'attacher la traverse YQ du montant XYQR à une simple douille, pour qu'on puisse la poser sur un trépied.

Un semblable appareil, isolant l'aiguille aimantée de tous les mouvements de son support, convient particulièrement aux observations nautiques ; aussi est-il, à bord des navires, le déclinateur des itinéraires maritimes. Seulement, on en rend alors le limbe fixe, en le soudant à l'aiguille § 194 ; afin que, dans les plus fortes secousses du bâtiment, cette aiguille ne quitte jamais le pivot, et l'espace qu'il y ait entre sa chappe et le verre de la boîte.

199. Régler la ligne de foi d'une boussole à la graduation  $g$ , imposée au coup d'alidade d'un alignement quelconque : c'est modifier, en conséquence, l'assemblage du tuyau visuel à ladite ligne, § 184 page 109. Pour cela, on dirigera l'axe visuel sur cet alignement ; et, alors, si la boussole est à limbe fixe (fig. 86, 88), on plantera l'index  $b$  de sa boîte en regard de la graduation  $g$  ; tandis que, si la boussole est à limbe mobile (fig. 87), on attachera ce limbe sur la boîte, de manière à couvrir son rayon  $g$  par l'aiguille aimantée.

Et si on a fait l'expérience qui, § 301, détermine le rayon parallèle à l'axe visuel : le choix de ce rayon, pour origine des coups d'alidade, donnera la déclinaison *magnétique* de chacun d'eux.

200. L'aiguille aimantée s'arrêtant avec moins d'hésitation quand elle est isolée, que si elle tient à une plaque ; on emploie, en topographie, le déclinateur et la boussole à limbe plutôt mobile que fixe. C'est pourquoi nous insisteront particulièrement sur les précautions à prendre dans l'usage de la boussole à limbe mobile ; bien que ces précautions soient déjà comprises dans les généralités sur les goniomètres.

Rigoureusement parlant, la boussole ne fournit les angles à l'horizon qu'autant que le plan de son limbe est horizontal ; toutefois, le maintien de cette disposition exigeant que

l'essieu du genou ne soit pas faussé, c'est-à-dire qu'il reste perpendiculaire à sa griffe ou au fond du déclinaire; on se croirait souvent obligé de renouveler, à chaque coup d'alidade, les essais du § 197, si, persuadé qu'une légère inclinaison du limbe n'altère pas sensiblement la projection de ce coup d'alidade, on ne se proposait de faire arraser l'aiguille par le rayon du limbe qui correspond à l'alignement particulier de l'axe visuel, dans le seul but de faciliter la lecture de la graduation fournie par l'index. C'est pourquoi, dans l'observation d'un coup d'alidade avec la boussole : on dirigera, d'abord approximativement, le tuyau visuel sur l'alignement proposé, et l'on rapprochera, ensuite, le limbe contre l'aiguille, par un mouvement de bascule qui laisse cette aiguille libre; puis, on visera avec soin le point de mire, pour lire, enfin, la graduation du limbe couverte par l'aiguille, dans le sens vertical.

201. Ainsi, une boussole à limbe mobile étant donnée (fig. 87); on commencera par éprouver si l'essieu de la boîte est bien ou mal dressé : en établissant le limbe dans le plan déclinaire de l'aiguille aimantée, pour reconnaître aussitôt la coïncidence successive de tous les rayons du limbe avec l'aiguille, pendant la rotation entière de la boîte, § 197, afin de s'astreindre, plus ou moins, à produire cette coïncidence, dans l'observation de chaque coup d'alidade.

On vérifiera ensuite, par le procédé du § 177 page 106, si le pivot de l'aiguille aimantée occupe le centre du limbe; et, quand ce pivot ne sera excentrique, on se rappellera que la valeur  $\frac{g + g' - 2^d}{2}$  de chaque coup d'alidade, § 176 page 105, dépend des graduations  $g$  et  $g'$  obtenues : soit avec une seule extrémité de l'aiguille, par les deux positions bout-pour-bout du tuyau visuel, sur le même alignement; soit avec les deux pointes de l'aiguille pour une seule position av du tuyau visuel (fig. 87).

202. Le graphomètre, § 188 page 112 (fig. 77), armé d'un déclinaire  $ng$  se transformera en boussole à limbe fixe :

quand l'aiguille aimantée remplacera l'axe visuel  $r'o'$ , devenu alors inutile; tandis qu'il sera boussole à limbe mobile: lorsque le déclinatoire aura un limbe circulaire, et qu'on adoptera le tuyau visuel  $r'o'$  fixé à la plaque, en rendant alors inutiles l'autre tuyau visuel  $rv$  et le limbe  $obr'$  du graphomètre, qui réunira, par cette modification, tous les genres de goniomètres numériques.

### *Les Goniomètres à réflexion.*

203. De ce que tout miroir plan réfléchit un rayon lumineux sous le même angle qu'il le reçoit: il résulte qu'un miroir  $ts$  (fig. 92), dont le plan divisera l'angle  $pcd$  en deux parties égales, réfléchira l'un des côtés  $cd$  de cet angle sur le prolongement  $cr$  de l'autre côté  $cr$ ; et un observateur, placé sur ce prolongement, apercevra l'image de  $D$  en coïncidence avec l'objet  $P$ .

En sorte qu'un angle  $pcg$  sera le double de l'espace angulaire décrit par le miroir, et conséquemment par son support, pour que ce miroir réfléchisse alternativement les deux côtés  $cd$ ,  $cg$  sur une direction quelconque  $pcr$ : car on a  $pcg = pcg - pcd$ ; mais le miroir, dans sa position  $ts$ , réfléchissant  $cd$  sur  $cr$ , divisera l'angle  $pcd$  en deux parties égales; de même, la position  $t's'$  du miroir, renvoyant l'image de  $G$  sur la direction  $cr$ , divisera l'angle  $pcg$  en deux parties égales; ainsi:  $pcg = 2pcs'$ ,  $pcd = 2pcs$

et  $pcg - pcd = dcg = 2(pcs' - pcs) = 2scs'$ .

204. L'instrument, qui marquera les déplacements angulaires d'un miroir par rapport à une direction de repère, sera donc un goniomètre, que l'on formera d'un limbe, au centre et perpendiculairement à la surface duquel sera adapté le miroir  $ts$  (fig. 92, 95) interceptant la moitié du champ du tuyau visuel  $rv$ , qui, posé lui-même sur un rayon du limbe, recevra à la fois les lignes lumineuses directes et réfléchies.

L'arc  $g'g$  parcouru sur le limbe par le support du miroir, quand on a fait réfléchir successivement les côtés  $cd$ ,  $cg$

d'un angle  $bcg$  sur un alignement quelconque  $per$  (fig. 92), étant la moitié de la mesure de cet angle ; il faudra doubler les numéros naturels du limbe , pour que la différence des graduations  $g$  et  $g'$  soit l'amplitude entière de l'angle  $bcg$ .

Dans ce nouveau goniomètre , appelé GONIOMÈTRE À SIMPLE-RÉFLEXION , le tuyau visuel est destiné à assurer l'alignement fixe ou de déclinaison , et l'alidade se trouve formée de l'ensemble du miroir et de son support : le miroir fournissant la direction réfléchie observée avec l'axe visuel , tandis que son support en donnera la ligne de foi.

205. Comme la superposition , dans le tuyau visuel , d'un rayon lumineux direct avec un rayon réfléchi peut s'effectuer en soutenant l'instrument d'une main , pendant que , de l'autre , on fera tourner le support du miroir : il suffira d'attacher , à la plaque du limbe , une douille servant de poignée.

206. Cette description des instruments à réflexion leur rend textuellement applicable ce qui a été dit sur les autres goniomètres. Ainsi , de ce que 1.<sup>o</sup> le miroir  $ts$  (fig. 95) peut avoir , pour support , une règle  $cg$  tournant sur le centre du limbe , que l'on conserve alors immobile au moyen de la direction constante donnée au tuyau visuel  $re$  faisant corps avec ce limbe ; ou que 2.<sup>o</sup> le miroir doive tenir au limbe , pour tourner avec lui contre l'appui  $cg'$  du tuyau visuel muni d'un index : on conclura qu'un goniomètre à réflexion aura son limbe fixe ou mobile , selon que le miroir se mouvra contre le limbe , ou qu'il lui sera attaché ; le rayon zéro du limbe étant , dans tous les cas , l'origine des arcs séparant l'alignement fixe , de chaque position prise par la ligne de foi de l'alidade § 169 page 102.

207. Avec le goniomètre à réflexion , on donnera un coup d'alidade-miroir suivant une direction : en réfléchissant cette direction sur un alignement servant de déclinaison , au moyen de la partie mobile du goniomètre , pour lire ensuite la graduation de l'index , qui sera le rayon commun à la partie fixe et à la partie mobile de l'instrument ; et l'observation d'un angle s'effectuera aussi par deux

coups d'alidade-miroir s'appuyant sur la même déclinaison, § 172 page 103.

208. L'usage du nouveau goniomètre à limbe fixe rendra le sens des coups d'alidade, à partir de l'alignement déclinateur, pareil à celui de la numération du limbe vu par sa partie concave; et, par suite, les angles auront aussi le sens de cette numération: c'est-à-dire que, si le limbe est numéroté de droite à gauche, le premier côté de l'angle, ou celui dont le coup d'alidade-miroir fournira la graduation à soustraire, sera le plus près de l'alignement direct ou de déclinaison, en suivant le sens de droite à gauche § 173; et l'emploi du goniomètre à réflexion, dont le limbe sera mobile, exigera que le sens des coups d'alidade, et par conséquent celui des angles, soit inverse à celui de la numération du limbe, § 174.

209. Afin d'abréger une observation angulaire: on cherchera, comme au § 181 page 107, la graduation du coup d'alidade-miroir *imaginé* suivant la direction du tuyau visuel; et, pour cela, on mesurera d'abord un angle  $\alpha$  (*fig. 92*) par deux coups d'alidade  $g, g'$  s'appuyant sur une direction auxiliaire  $rp$ , tellement que  $(g' - g)$  sera l'amplitude  $z$  de cet angle. On donnera, ensuite, un coup d'alidade sur le second côté  $cg$  en se déclinant sur le premier côté  $cn$ , ce qui produira une graduation  $g''$ ; et, en désignant par  $x$  la graduation du coup d'alidade *imaginé* suivant  $cn$ , c'est-à-dire, la position qu'aurait l'index, si la face réfléchissante du miroir était dans l'alignement direct  $cn$ , on aura aussi  $(g'' - x) = z$ ; et  $(g'' - z) = x$  sera la graduation du coup d'alidade propre à la direction du tuyau visuel.

La mesure d'un angle consistera alors: à donner sur le second côté un coup d'alidade-miroir décliné suivant le premier côté, c'est-à-dire, à faire réfléchir le second objet sur le premier, pour avoir une graduation dont on retranchera  $x$  ou  $(g'' - z)$  précédemment trouvée.

210. Lorsqu'on pourra changer la position du tuyau visuel et du miroir sur leurs bases respectives, il sera facile

de régler le tuyau visuel à une graduation désignée  $b$ , c'est-à-dire, d'assigner cette graduation au coup d'alidade-miroir imaginé suivant ce tuyau visuel. En effet, l'amplitude  $z$  d'un angle  $deg$  (fig. 92) ayant été préliminairement obtenue, en s'appuyant sur une déclinaison auxiliaire  $ce$  ; si l'on désigne par  $c'$  la graduation du coup d'alidade, qui serait donné suivant le second côté  $ce$  en se déclinant sur  $cd$  : on aura  $c' - b = z$ , d'où  $c' = (b + z)$ . Il suffira, par conséquent, de fixer l'index du goniomètre sur la graduation  $(b + z)$ , pour que, l'image du second côté  $c$  étant, ensuite, superposée avec le premier objet  $d$ , par les déplacements particuliers du tuyau visuel et du miroir sur leurs supports, le tuyau visuel soit réglé à la graduation  $b$  et conserve cette propriété, tant que son assemblage et celui du miroir, sur leurs supports respectifs, resteront tels qu'ils viennent d'être établis.

Ainsi, pour régler, à la graduation particulière *zéro*, le tuyau visuel du goniomètre, à simple-réflexion : on en placera l'index sur la graduation  $z = (g' - g)$  précédemment trouvée, et l'on fera réfléchir le second côté de l'angle  $z$  sur le premier, par les assemblages mobiles du miroir et du tuyau visuel sur leurs supports, § 184 page 109.

211. La faculté de soutenir avec la main un goniomètre à réflexion, permettant d'en renverser le limbe (fig. 96, 97) pour changer, à volonté, le sens de sa numération et celui de l'angle à observer entre deux objets ; on pourra et l'on devra toujours faire réfléchir l'objet le plus distinct sur l'autre. En sorte que l'usage du goniomètre à simple-réflexion consistera définitivement dans la méthode suivante :

Le tuyau visuel ayant été préalablement réglé à zéro, dans l'acception que nous venons d'admettre : on déterminera le sens de l'angle par le choix de l'objet à réfléchir. Et, selon que le goniomètre sera à limbe fixe ou mobile, c'est-à-dire que l'index tiendra au miroir ou au tuyau visuel, on rendra le sens de numération du limbe pareil ou inverse à celui de l'angle, par la manière dont on supportera l'instrument. Visant ensuite le premier objet, on fera tourner le

miroir jusqu'à ce qu'il renvoie, dans le tuyau visuel, l'image du second objet sur le premier; et la graduation, alors marquée par l'index, mesurera l'amplitude de l'angle.

212. Nous avons dû recourir, jusqu'à présent, à une direction auxiliaire pour décliner un goniomètre à réflexion § 203, 208, 209; mais, si on suppose que l'alignement déclinateur  $pcr$  (fig. 92) soit reçu par un autre miroir  $ab$  pour se réfléchir suivant  $ka$  prolongement de  $dk$ : la position du miroir  $ts$  qui, dans le premier coup d'alidade de l'observation angulaire  $dcg$ , doit réfléchir le côté  $cd$  suivant  $cr$ , renverra, au moyen du nouveau miroir  $ab$ , l'image de  $d$  sur l'objet  $d$  lui-même, vu directement par le tuyau  $rv$ ; la seconde position  $t's'$  du miroir qui, dans le coup d'alidade donné sur le côté  $cg$ , devra réfléchir ce côté suivant  $cr$ , reportera aussi, dans le miroir  $ab$  et sur la direction  $dk$ , l'image de  $g$  en coïncidence avec l'objet  $d$ : de telle sorte que l'alignement  $dka$ , ayant servi de déclinaison commune aux coups d'alidade-miroir donnés sur  $d$  et  $g$ , remplacera la direction auxiliaire  $pcr$ .

Le goniomètre à réflexion, où l'on a introduit un second miroir  $ab$  et déplacé le tuyau visuel de  $rv$  en  $rv$  (fig. 92), devient alors à DOUBLE-RÉFLEXION, et offre l'avantage de mesurer immédiatement un angle en se déclinant sur l'un de ses côtés. Le miroir  $ts$ , qui appartient à l'alidade, est dit le *grand miroir*; tandis qu'on désigne par *petit miroir*, celui  $ab$  qui, ayant le même support que le tuyau visuel  $rv$ , intercepte seulement la moitié de ce tuyau pour y laisser parvenir ensemble les rayons lumineux directs et réfléchis.

On obtient, préalablement, la réflexion  $ka$  du point  $c$  distinctement marqué: par de légers mouvements du petit miroir  $ab$ , ou du tuyau visuel  $rv$ , sur leur support commun.

213. Il est évident que cette modification, apportée aux goniomètres à réflexion, n'en changera pas la manœuvre; ainsi: le goniomètre à double-réflexion aura son limbe fixe ou mobile, selon que le grand miroir sera supporté par une règle détachée du limbe, ou qu'il fera corps avec ce dernier.

L'index du goniomètre tiendra au grand miroir dans le premier cas, et au tuyau visuel dans le second cas.

Le sens de la numération du limbe, vu par sa partie concave, étant à la volonté de l'observateur, par la manière dont il soutiendra l'instrument (*fig. 98, 100*) ; on choisira le sens de l'angle, c'est-à-dire, celui par lequel on arrivera de l'objet direct à l'objet réfléchi, pour donner à la numération du limbe ce même sens quand le goniomètre aura son limbe fixe, et un sens contraire lorsque le goniomètre sera à limbe mobile, § 208 page 121.

214. Dans un goniomètre à double-réflexion, le coup d'alidade suivant l'alignement du tuyau visuel ne fournit pas toujours la même graduation : parce que le grand miroir *ts* (*fig. 92*), qui doit réfléchir sur *ck* l'objet d'appui *n* de cet alignement, change de position avec la distance *nk*. Cependant, quand cette distance est assez grande, par rapport à l'excentricité *ck*, pour que l'angle *cnk* soit inférieur à l'incertitude de lecture  $\varphi'$  sur le limbe, ou  $\frac{nk}{ck} > \frac{6400}{\varphi}$ ,

§ 175 page 104 ; les directions *nc*, *nk* seront considérées comme parallèles, et le coup d'alidade sur l'objet *n*, répondant alors au parallélisme des deux miroirs, deviendra *constant* pour toutes les observations qui s'appuieront sur des distances *convenables*.

215. Lors donc que les côtés de l'angle à observer ne seront pas *assez* grands ; la mesure de cet angle exigera toujours deux coups d'alidade, et consistera à faire coïncider dans le tuyau visuel, par deux positions successives du grand miroir, le premier objet : d'abord, avec son image pour avoir une graduation *g* de l'index ; puis, avec l'image du second objet qui fera marquer à l'index une nouvelle graduation *g'*, dont on retranchera la précédente *g* pour obtenir l'amplitude cherchée (*g'—g*).

Mais, si les points de mire sont *convenablement* éloignés du lieu de station, et qu'on connaisse la graduation, alors *constante*, du coup d'alidade suivant le tuyau visuel ; il suf-



fira, pour observer un angle : de donner un coup d'alidade sur son second côté, c'est-à-dire de superposer le premier objet avec l'image de l'autre objet doublement réfléchi, et de retrancher la graduation constante, de celle que l'on vient d'obtenir.

216. Un assemblage variable du grand miroir sur son support, permettra d'imposer une graduation quelconque  $b$  au coup d'alidade selon le tuyau visuel du goniomètre à double-réflexion : en plaçant, d'abord, l'index sur cette graduation, et en effectuant la coïncidence d'un objet, *convenablement* éloigné, avec son image, à l'aide du mouvement propre du grand miroir sur son support ; et, si l'on a réglé, de cette manière, le tuyau visuel au *zéro* du limbe : la graduation du coup d'alidade, donné sur le second côté d'un angle, deviendra l'amplitude même de cet angle, tant que l'assemblage actuel des parties du goniomètre ne sera pas changé.

217. En considérant que le tuyau visuel intercepte, à l'origine de la réflexion lumineuse simple ou double, une très petite longueur de cette réflexion ; on conçoit que les rayons lumineux émanés de plusieurs points  $n'$ ,  $n''$ ..... voisins de l'objet  $n$  (fig. 92) se superposent près du miroir  $ts$ , et que les images desdits objets, réfléchis simplement ou doublement, viennent se confondre dans le tuyau, pour occasionner des oscillations dans la perception visuelle de ces images, qu'on saisira difficilement, même avec beaucoup d'habitude. Ce qui montre combien il reste à désirer sur la précision des instruments à réflexion, dont l'usage n'est pas moins d'un grand secours dans les stations mal posées et vacillantes, et particulièrement en mer, où l'on ne peut employer d'autres goniomètres, § 257.

Et, pour apprécier l'erreur qui vient d'être mentionnée, supposons que, à la distance  $t$  du miroir, le faisceau lumineux ait la très-petite épaisseur un *millimètre* : la déviation angulaire des deux rayons extrêmes de ce faisceau, ou l'incertitude du pointé sur une image, aura pour sinus  $\frac{1^{\text{milli.}}}{t}$ , et

pour amplitude  $\frac{1}{t}$  <sup>milli.</sup> 64 grades, § 54 page 25, qui, dans l'hypothèse exagérément grande  $t = 0^m, 4$ , devient 16 centigrades ou environ le sixième d'un grade ; tandis que, dans le cas le plus ordinaire  $t = 0^m, 15$ , elle produit 43 centigrades ou les deux cinquièmes d'un grade.

218. Les causes d'erreur, qui, rigoureusement parlant, peuvent affecter les observations faites avec un goniomètre à réflexion, sont : le défaut de parallélisme du tuyau visuel sur le plan du limbe, la non-perpendicularité des miroirs relativement à ce plan, et l'excentricité du pivot de l'alidade par rapport au limbe. Il semblera, donc, nécessaire de vérifier ou de rectifier, d'abord, les parties de l'instrument : or, 1.<sup>o</sup> le § 160 page 94, donne le moyen de rendre l'axe visuel d'un tuyau parallèle à sa base d'appui ; 2.<sup>o</sup> chaque miroir sera établi perpendiculairement au limbe : quand, à l'aide des vis qui attachent ce miroir à son support, l'image du limbe, ou celle d'un plan parallèle à ce limbe, paraîtra sur le prolongement même dudit plan ; et 3.<sup>o</sup> l'excentricité de l'index se corrigera : en observant chaque coup d'alidade-miroir, par les deux positions bout-pour-bout du miroir sur son support, comme on l'a prescrit au § 176, page 105.

On comprendra, toutefois, le peu d'importance de ces rectifications qu'on pourra même négliger, en comparaison de l'incertitude, sur le pointé et la superposition des objets, provenant de la très-petite partie du rayon réfléchi qui, près du miroir, pénètre dans le tuyau visuel.

219. L'alidade-miroir d'un goniomètre à réflexion n'ayant à parcourir que deux angles droits pour mesurer toutes les inclinaisons, § 204 p. 119 ; on en bornera le limbe à une demi-circonférence, et, même souvent, à l'arc sous-tendu par son rayon, c'est-à-dire, au sixième de la circonférence (*fig. 94*) qui, en permettant l'observation d'angles ouverts jusqu'à  $130^\circ$ , fait alors donner au goniomètre le nom de **SEXTANT**.

Lorsque le goniomètre à réflexion est destiné à mesurer des angles plus petits qu'un droit : on en réduit le limbe au

huitième de la circonférence, et il prend le nom d'OCTANT.

Le sextant et l'octant suffisent aux angles simples, observés en mer.

*Le Rapporteur angulaire.*

220. Le rapporteur circulaire, dont nous avons commencé à indiquer l'usage au chapitre des instruments graphiques, § 92 à 100 page 49 à 52, sert à tracer les angles qui ont été observés avec les goniomètres numériques précédemment décrits.

Cet instrument, auquel, pour plus de commodité, nous avons donné un sens de numération inverse à celui des angles qu'il est destiné à marquer, § 95 page 50, se trouve alors dans la classe des goniomètres à limbe mobile. Il aura pour direction fixe une droite  $y'y'$  (fig. 58) devant décliner tous les coups d'alidade d'une même station; et la règle  $AB$  deviendra l'axe visuel de son alidade, tandis que le rayon zéro en sera la ligne de foi, § 169 page 102.

Ainsi, pour relever avec le rapporteur une droite  $rv$  relativement à la déclinaison  $y'y'$  (fig. 58): on placera la règle  $AB$  sur cette droite, et l'on fera glisser l'instrument jusqu'à ce que la déclinaison  $y'y'$  en devienne un rayon, dont la graduation  $G$  appartiendra, alors, au coup d'alidade sur  $rv$ . Réciproquement, on tracera par un point  $P$  le coup d'alidade graduée  $G$ : en posant le rayon  $G$  sur la ligne de déclinaison  $y'y'$ , en même temps que la règle  $AB$  couvrira  $P$ , § 96 page 50 et § 172 page 103.

221. De même qu'on l'a pratiqué pour les précédents goniomètres, § 184, 199, 210, 216, on pourra assigner une graduation  $G'$  au coup d'alidade de la direction quelconque  $av$  (fig. 58): soit en concluant la ligne de déclinaison  $x'x'$  propre à ce coup d'alidade, avec un limbe donné; soit en modifiant la numération de ce limbe, eu égard à une déclinaison voulue  $y'y'$ .

Il suffira, en effet, dans la première circonstance, de tracer la déclinaison  $x'x'$  par le rayon  $G'$ , quand la règle  $AB$

coïncidera avec  $rv$  : ce qui reviendra à poser sur  $rv$  le rayon  $g'$  du rapporteur *retourné*, et à tirer ensuite  $xx$  par la règle  $ab$ .

Et, quand on voudra subordonner la numération du rapporteur à la graduation  $g'$  imposée au coup d'alidade  $rv$  qui s'appuie sur la déclinaison  $r'y'$  : on écrira le numéro  $g'$  sur le rayon couvrant  $r'y'$  pendant que la règle  $ab$  coïncidera avec  $rv$ ; et l'on partira de cette graduation  $g'$  pour numérotter les autres rayons du rapporteur, qui seront même avantageusement terminés à un nouveau limbe  $L'$  (*fig.* 53, 54, 58).

222. Pour marquer sur le papier, dans leur ordre naturel, les angles qui, en une station, ont été relevés avec un goniomètre quelconque : on tracera avec le rapporteur, convenablement numéroté, les coups d'alidade donnés sur les côtés de ces angles. Or, le goniomètre, employé dans les observations, pouvant avoir son limbe fixe ou mobile, § 169 p. 102; tandis que le rapporteur est toujours à limbe mobile : il faudra que le sens de numération de ce rapporteur soit inverse à la numération du goniomètre à limbe fixe, et le même que la numération du goniomètre à limbe mobile, pour que les coups d'alidade se tracent dans le sens de l'observation.

Si donc, on suppose que  $R, D, E, S, T$  désignent les graduations des coups d'alidade observés sur divers alignements; et que, après avoir donné au rapporteur une déclinaison quelconque  $q'f$  (*fig.* 56), l'on couvre successivement cette droite par les rayons  $R, D, E, S, T$ , en conservant la règle du rapporteur sur le même point  $b$  : les traces de cette règle fourniront les directions  $br', bd', be', bs', bt'$ , respectivement propres aux coups d'alidade indiqués. De sorte que les angles graphiques  $r'bd', dbe', e'bs', \dots$  auront les amplitudes et la disposition des angles observés.

223. S'il s'agit de tracer les angles d'une station, en les appuyant sur une droite donnée  $xe$  homologue à  $be'$  (*fig.* 56); on transportera en  $x$  la figure qui vient d'être faite en  $b$ , de manière que  $be'$  coïncide avec  $xe$ , pour décalquer ensuite  $bd, br', bs', bt',$  en  $xd, xr, xt, xs$ . Cependant, on évi-

tera l'opération provisoire autour de  $b$ , en remarquant que le transport de  $be'$  sur  $xe$  placera en  $qf$  la déclinaison auxiliaire  $q'f$  du rapporteur, comme on l'eût d'abord conclue du coup d'alidade  $xe$  ou  $be'$  gradué à § 221; de sorte que les coups d'alidade  $xd$ ,  $xe$ ,  $xt$ ,  $xs$ ,... pourront, alors, être immédiatement rapportés au centre  $x$ , avec la déclinaison  $qf$  du coup d'alidade primitif  $xe$ .

224. Lorsque la direction de repère restera parallèle à elle-même, dans toutes les stations d'un goniomètre : on devra, aussi, adopter une même déclinaison pour le rapporteur destiné à coordonner entre eux les coups d'alidade de ces stations.

Supposons, en effet, qu'on ait donné, avec le goniomètre à déclinaison constante, des coups d'alidade sur le même alignement, en deux stations différentes : ces coups d'alidade auront des graduations pareilles; et, pour que les deux traces, fournies en  $x$  et  $v$  par le rapporteur (fig. 58), aient une commune direction, il faudra que les axes de déclinaison  $xx$  et  $x'x'$  soient parallèles.

Il suffira donc de déterminer, en une seule station, la déclinaison du rapporteur, qui doit être employé avec un goniomètre dont l'alignement de repère restera constamment parallèle à lui-même, pour que cette déclinaison serve à coordonner immédiatement entre eux les coups d'alidade appartenant à des stations différentes.

C'est ainsi que les coups d'alidade, observés avec une boussole en plusieurs stations, s'appuieront tous sur la même déclinaison du rapporteur, tant que l'aiguille aimantée sera soumise à des influences semblables.

225. Le limbe  $L'$  (fig. 58), qui a été ajouté au rapporteur pour imposer une déclinaison voulue  $x'y'$  au coup d'alidade  $rv$  de graduation donnée  $c'$ , § 221, est dit *complémentaire* du limbe  $L$  : parce que les rayons, qui ont le même numéro sur les deux limbes, formant l'angle  $\varphi$  des axes de déclinaison  $x'y'$ ,  $x'x'$ , le rayon *zéro* de l'un coïncidera avec le rayon  $\varphi$  de l'autre, et chaque rayon de la plaque du rapporteur dési-

gnera, sur ces limbes, des numéros ayant  $\varphi$  pour différence ou complément.

Par conséquent : étant donnés deux axes  $xx$ ,  $yy$ , dont l'angle  $\varphi$  aura servi à numérotter les limbes réciproquement complémentaires  $L$ ,  $L'$  d'un rapporteur (*fig. 58*) ; on pourra tracer la direction  $rv$  d'un coup d'alidade : en employant indifféremment le limbe  $L$  avec la déclinaison  $x'x'$  parallèle à  $xx$ , ou le limbe  $L'$  avec la déclinaison  $y'y'$  parallèle à  $yy$ . Seulement, il faudra distinguer ces axes de déclinaison, par des marques différentes, § 98 page 51.

Il résulte de ces dispositions : que, si la règle du rapporteur, dans son mouvement suivant l'axe  $x'x'$ , ne rencontre pas le point  $r$  destiné à fixer le coup d'alidade gradué  $g$ , on appuiera ce mouvement sur l'axe  $y'y'$ , qui, procurant *peut-être* ce résultat, évitera de tracer une nouvelle ligne de déclinaison convenablement rapprochée du point  $r$ .

Les figures 53 et 54 représentent des rapporteurs, dont les limbes complémentaires s'emploient avec des axes rectangulaires.

### *La Planchette.*

226. On trace, sur le papier, les angles en même temps qu'on les observe : au moyen de la Planchette que nous avons composée, § 189 page 113, d'une alidade et d'une tablette (*fig. 82*), sur laquelle il est inutile de marquer un limbe, et que l'on peut même priver du tuyau visuel  $r'o'$  devant en assurer la déclinaison, en formant cette tablette avec une planche épaisse, assez solidement montée sur un trépied *aug* pour que les déplacements de l'alidade *barre* ne lui occasionnent aucun mouvement.

La feuille, destinée à recevoir les opérations, se tend sur la planche à l'aide de pinces ou, mieux encore, de rouleaux *ss*, *tt* disposés sous cette planche.

227. La planchette fournit ordinairement les angles réduits à l'horizon ; et les résultats graphiques, immédiate-

ment attendus de ce goniomètre, permettent d'utiles approximations dans la mise en place de sa tablette.

En effet, à cause des limites d'exactitude indiquées par l'échelle  $\frac{1}{m}$ , § 7 page 2, il suffira de faire correspondre,

à une différence près  $yy'$  moindre que  $\frac{m''}{10000}$  (fig. 82), la verticale de station avec le point  $y$  autour duquel doit rayonner l'alidade plongeante  $barv$ ; tandis que l'horizontalité de la planche sera convenablement établie: en plaçant à vue deux de ses côtés non parallèles  $ss$ ,  $ts$  sur l'horizon sensible, ou même en calant cette planche avec une bille. De sorte qu'on arrivera assez promptement à la mise en place, par les dérangements brusques des branches  $d$ ,  $u$ ,  $g$  vissées au moyen de la tablette (fig. 84), sans qu'il soit nécessaire d'imprimer des mouvements de rappel à cet assemblage, qui acquiert, ainsi, une grande simplicité.

228. Pour marquer, avec la planchette, les projections d'angles observés autour d'une station  $v$ , marquée en  $y$  sur la feuille (fig. 82): la tablette étant mise approximativement en place à cette station, on empêchera le mouvement déclinaire de la planche, en serrant l'écrou  $q$  de son essieu contre la joue du moyen (fig. 84), et l'on donnera, par le centre  $y$ , des coups d'alidade  $yb$ ,  $ya$ ,  $yc$ ,... sur chacun des alignements considérés, pour avoir les projections  $bya$ ,  $byc$ ,  $byt$ .... des angles formés par ces alignements.

229. S'il s'agit d'appuyer ces angles horizontaux sur un côté donné  $yb$  (fig. 82); cela reviendra à décliner d'abord la planchette suivant ce côté: en posant la ligne de foi de l'alidade sur  $yb$ , et en dirigeant l'axe visuel  $rv$  dans l'alignement terrestre correspondant, par le mouvement déclinaire de la planche qu'on arrêtera aussitôt, pour donner ensuite les coups d'alidade  $ya$ ,  $yc$ ,  $yt$ ,....

230. Les directions de l'axe visuel de l'alidade étant sensiblement parallèles, dans l'étendue où les traces correspondantes de sa ligne de foi peuvent l'être, § 87 page 47;

il s'ensuit que, pour mener, par le point  $a'$  d'une feuille (fig. 82), une droite  $a'c'$  graphiquement parallèle à  $yv$ : il faudra décliner cette feuille par  $yv$ , sur une distance  $yx$  plus grande que  $\frac{a'c'}{0^{\text{m}},01} \times \frac{a'y}{0^{\text{m}},01}$  mètres, et donner, par  $a'$ , un coup d'alidade sur l'extrémité  $x$  de cette distance.

231. Quand le parallélisme graphique sera exigé dans la seule longueur  $a'c'$  (fig. 82), qui représente la distance  $a'x$  à l'échelle  $\frac{1}{M}$ ;  $a'x$  vaudra  $M \times a'c'$ , et la précédente limite deviendra  $a'y < \frac{M^2}{10000}$ . Conséquemment, les coups d'alidade

dirigés sur un même objet, par divers points d'une feuille distants entre eux d'une quantité moindre que  $\frac{M^2}{10000}$ , produiront des droites parallèles, dans l'étendue graphique de la longueur visée. Ce qui est l'application des limites d'excentricité accordées à l'axe visuel de l'alidade, § 175.

D'où l'on conclut que, si un obstacle  $x$  empêche la direction visuelle du coup d'alidade qui, lancé sur  $x$ , doit être tracé par le point  $y$  (fig. 82): on essaiera le coup d'alidade  $a'c'$  sur  $x$ , par un autre point  $a'$  tel que  $a'y$  ne dépasse pas  $\frac{M^2}{10000}$ , pour tirer ensuite  $yv$  parallèle à  $a'c'$ .

232. Pour transporter en  $bzu$  l'angle  $b'z'u'$  (fig. 21): on repérera ce dernier sur le terrain, en  $bzu$ , au moyen de la déclinaison  $b'z'$  suivant un alignement quelconque  $bz$ , et du coup d'alidade  $z'u'$  rencontrant un objet  $u$  momentanément remarqué § 185 page 109; après quoi, on relèvera cet angle  $bzu$ , en appuyant la déclinaison  $zb$  de la planchette sur le point  $z$ , pour donner ensuite le coup d'alidade  $zu$  sur l'objet  $u$ , § 229.

233. On emploie, aussi, la planchette à diviser en deux parties égales un angle  $Apb$  tracé en  $apb$  (fig. 91).

On effectuera d'abord ce partage, à vue, par la ligne  $px$  repérée ensuite sur  $pg$ ; l'angle  $apx$  égalera  $xpb$ : si, la planchette étant déclinée, par  $pb$ , sur  $pg$ , le coup d'alidade sur  $A$  couvre  $px$ ; et comme, le plus souvent, ce coup d'alidade



marquera  $px'$  différent de  $px$ , le milieu  $o$  de la petite partie  $xx'$ , pris à vue, donnera une ligne  $op$  pour remplacer  $ap$  dans une nouvelle épreuve de coïncidence entre les deux parties de l'angle  $bpa$ , et cette coïncidence, bientôt obtenue, servira à repérer la direction qui divise l'angle  $apb$  en deux parties égales.

234. La détermination d'un alignement perpendiculaire à une direction donnée est un cas particulier de cette question, où l'on comparera deux angles adjacents graphiques à un même angle repéré sur le terrain, pour diminuer successivement la différence de ces angles jusqu'à la rendre nulle. Ainsi, s'il s'agit d'élever par le point  $p$  la perpendiculaire à l'alignement  $pa$  (fig. 91) : on déclinera la planchette, par  $pa$  sur  $pa$ , et l'on supposera perpendiculaire à  $pa$  le coup d'alidade  $pb$ , momentanément repéré en  $b$  ; puis, on éprouvera l'égalité des angles adjacents  $apb$ ,  $bpc$ , par la déclinaison  $pa$  sur  $pb$ , en  $pa'$ , pour reconnaître si le coup d'alidade  $cp$ , sur  $A$ , couvre la nouvelle position  $b'p$  de  $bp$  ; et, dans le cas contraire, on marquera à vue le milieu  $t$  de l'intervalle  $cb'$ , pour extrémité de la perpendiculaire qui, vérifiée en recommençant l'expérience précédente, servira à repérer un point  $b'$  de l'alignement  $pb'$  perpendiculaire à  $pa$ .

235. La planchette sert, encore, à tracer le segment capable d'un angle dont ce goniomètre occupe le sommet.

Soient  $d$  et  $g$  (fig. 25) les positions graphiques de deux objets  $D$  et  $G$  observés d'un lieu  $Z$ , accessible dans les limites de l'échelle ; on aura le point de rencontre du segment avec une droite quelconque  $gt$  : en déclinant la planchette suivant  $tg$  correspondant à  $zg$ , et en donnant, par  $d$ , un coup d'alidade sur l'objet  $D$  ; ce qui formera l'angle  $dtg$  égal à  $DZG$ , et, par suite,  $t$  sera le premier point cherché. On obtiendra, de même, par des déclinaisons successives en  $t'g$ ,  $t''g$ ,... les points du segment capable qui se trouvent sur ces droites, pourvu que les sommets  $t$ ,  $t'$ ,  $t''$ ,... ne s'écartent de la verticale de station  $Z$  que dans les limites  $\frac{M}{10000}$ .

236. L'aiguille aimantée, en fournissant le moyen d'assurer, suivant sa longueur, la déclinaison de la planchette, § 191, 192, 193 pages 113, 114, permettra, aussi, de donner une constante déclinaison à ce goniomètre, dans toutes les stations où les influences magnétiques seront pareilles. En sorte que, la planchette ayant d'abord été déclinée sur une ligne  $ab$  (fig. 82), si l'on remarque la position alors occupée par l'aiguille du déclinateur, vissé à la tablette en  $ADC$ , ou posé seulement en  $a'd'c'$  contre la ligne  $a'd'$  de la feuille : la même déclinaison se reproduira à toute autre station, en faisant tourner la tablette de manière à placer sous l'aiguille l'index du déclinateur, qu'on aura établi dans sa position primitive  $ADC$  ou  $a'd'c'$ .

L'adjonction du déclinateur à la planchette transforme ce goniomètre en une **BOUSSOLE GRAPHIQUE**, que l'on vient de régler sur un coup d'alidade donné, comme on l'a fait à l'égard de la boussole numérique, § 199 page 117.

237. On improvise quelquefois une planchette : en lui donnant pour alidade, une règle saillante  $RABV$  en bois ou en papier, § 158 (fig. 68), et, pour tablette, un morceau de planche ou de carton, posé sur un pied fait de trois baguettes  $GS$ ,  $DT$ ,  $UC$  (fig. 83), qui se croisent dans un nœud  $E$ .

Un petit déclinateur  $ABC$ , vissé au carton  $ats$  (fig. 82), complète d'ailleurs une boussole graphique, toujours suffisante aux observations qui ont plus besoin d'être promptes qu'exactes.

### *L'Angle et l'Équerre d'arpenteur.*

238. On rattache des points entre eux par coordonnées : avec un angle constant, qui, par son fréquent usage dans l'arpentage, porte le nom **D'ANGLE D'ARPEUR**.

Cet instrument se compose de quatre épingles  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  (fig. 90) s'élevant sur une plaque  $XY$  clouée à un bâton  $U$ , ou, mieux encore, de quatre pinnules pratiquées dans un prisme creux  $ZF$ , terminé par une douille  $F$  pour se poser sur

un pied. Trois des épingles, ou pinnules, sont fixes, et l'autre peut se déplacer pour faciliter le règlement ou la vérification de l'instrument.

L'angle d'arpenteur se reporte en un point  $p$  du terrain (fig. 91) : au moyen d'objets  $B$  et  $A$  remarquables sur des directions visuelles  $db$  et  $ca$ , données par les pinnules  $a, b, c, d$  ; et, réciproquement, on forme cet instrument avec l'angle de deux alignements terrestres  $pb, pa$  : en le stationnant au sommet  $p$  de cet angle, de manière que, le rayon visuel  $ca$  passant par  $A$ , la pinnule mobile  $b$  puisse s'arrêter sur la direction  $pb$ . Enfin, pour placer l'angle d'arpenteur sur le papier : on mesurera, sur le terrain, les trois côtés  $ap, pa, ba$  du triangle  $apa$  dont l'angle  $p$  est donné par l'instrument, et l'on construira, sur la feuille, un triangle  $\epsilon\pi\alpha$  ayant ses côtés proportionnels aux longueurs mesurées : l'angle  $\pi$ , égalant  $apa$ , sera l'angle cherché.

239. L'angle droit pouvant se vérifier et se tracer sans mesurer de distances ; on l'adopte, le plus ordinairement, pour celui des axes coordonnés. Et, dans ce but, on a rendu droit l'angle d'arpenteur qui devient, alors, ÉQUERRE VISUELLE.

Pour vérifier ou régler l'équerre visuelle dont la pinnule  $b$  sera mobile, quand on n'aura pu tracer, sur la plaque (fig. 90), les deux appuis  $ac, bd$  des pinnules perpendiculairement entre eux : on stationnera cet instrument sur un alignement  $pa$  reconnu par l'axe visuel des pinnules  $c, a$  (fig. 91), et l'on remarquera, au loin, un objet  $B$  dans la direction  $db$  ; les angles adjacents  $apb, bpc$  seront droits s'ils sont égaux, c'est-à-dire si, mettant  $ca$  sur  $pb$ ,  $bd$  vient passer par  $A$ , § 88 page 47. En tournant donc l'équerre, pour que  $ca$  vienne dans l'alignement  $c'a'$  de  $pb$ , on observera si la position  $b'd'$  de  $bd$  passe par  $A$ , auquel cas l'équerre sera juste. Autrement, on déplacera la pinnule  $b$  venue en  $b'$ , de manière à diviser, en parties paraissant égales, l'intervalle de  $A$  au point  $c$  remarqué sur  $b'd'$  ; et, pour vérifier si ce déplacement  $b't$  suffit : on éprouvera la nouvelle direction  $td'$

comme celle *db* dont on était d'abord parti, en continuant les essais précédents jusqu'à superposition des angles adjacents *apb*, *bpc*.

Les directions, fournies par les pinnules de l'équerre d'arpenteur, se trouvant dans l'alignement; le règlement de cette équerre n'a fait que répéter le mode de détermination des axes rectangulaires avec la planchette, § 234.

#### LES GONIOMÈTRES RÉPÉTITEURS.

##### Généralités.

240. Quelque soignée que paraisse la division du limbe d'un goniomètre; son imperfection, tout en échappant à nos sens, pourra souvent occasionner, dans l'évaluation des angles, des erreurs qui influenceront sur les résultats dépendant de ces angles.

Comme les inexactitudes de division d'un limbe circulaire se compensent dans la circonférence entière; on a imaginé d'atténuer les erreurs qui peuvent affecter la graduation d'un arc de ce limbe: en concluant ladite graduation de celle d'un multiple de cet arc comprenant une ou plusieurs circonférences. Ainsi, au lieu de lire la graduation de l'arc *og*, (*fig. 89*): on portera cet arc, bout-à-bout sur le limbe, jusqu'à ce qu'on ait dépassé une circonférence, en faisant :

$$og_1 = g_1 g_2 = g_2 g_3 = g_3 g_4,$$

pour avoir :  $\frac{1}{4}$  Arc *og*, = circonférence + arc *og*,

$$\text{et amplitude } og_1 = \frac{400^\circ}{4} + \frac{\text{grad. } og_1}{4}.$$

La mesure de l'arc *og*, sera alors obtenue, à moins du quart de l'erreur propre à l'arc *og*, plus petit que l'arc *og*,.

Si, au lieu de s'arrêter au point *g*,, on continue à porter, bout-à-bout sur le limbe, l'arc *og*, jusqu'en *g*,, où l'on vient de dépasser une seconde fois le point *o*, on aura :

$$7 \text{ arc } og_1 = 2 \text{ circonf.} + \text{arc } og_1,$$

$$\text{et amplit. } og_1 = \frac{800^\circ}{7} + \frac{\text{grad. } og_1}{7}.$$

de sorte que cette appréciation de l'arc  $og_1$  n'encourra plus que la septième partie de l'erreur propre à la graduation de l'arc  $og_7$ .

En général, l'arc  $z$ ,  $n$  fois porté sur un limbe, de manière à comprendre  $n$  circonférences de ce limbe plus un arc  $z$  inférieur à  $z$ , produira :  $n$  arc  $z = n$  circon. + arc  $z$  ;

d'où : amplitude arc  $z = \frac{n}{N} 400^\circ + \frac{\text{grad. arc } z}{N}$ .

On obtiendra donc la graduation d'un angle  $\alpha ca$ , avec une limite d'exactitude désignée : en portant convenablement, sur le limbe, l'arc qui mesure cet angle.

241. L'approximation précédente sera également atteinte : en donnant au goniomètre plusieurs index, qui, marquant chaque coup d'alidade en divers endroits du limbe, fourniront une lecture moyenne d'autant moins incertaine que ces index seront plus nombreux.

Ainsi, en supposant quatre index  $b, a, b', a'$  (fig. 80), qui désignent, après le coup d'alidade sur le premier côté d'un angle  $c$  : les graduations  $g_1, g_2, g_3, g_4$  ; et, après le coup d'alidade sur le second côté de cet angle :  $g_1, g_2, g_3, g_4$  ; l'amplitude de  $c$  aura quatre graduations lues sur différentes parties du limbe, savoir :  $(g_1 - g_1), (g_2 - g_2), (g_3 - g_3), (g_4 - g_4)$ , dont la moyenne  $\frac{(g_1 - g_1) + (g_2 - g_2) + (g_3 - g_3) + (g_4 - g_4)}{4}$ ,

ou  $\frac{(g_1 + g_2 + g_3 + g_4)}{4} - \frac{(g_1 + g_2 + g_3 + g_4)}{4}$ , donnera une valeur de  $c$ , dans laquelle les erreurs de lecture auront, au moins, quatre chances de compensation.

De plus, la décentration des index n'influera pas sur cette valeur moyenne de  $c$  : en effet  $c$ , observé avec les index décentrés  $b$  et  $a$ , aura pour mesure, § 178 page 106,

$$c = \frac{g_1 - g_1}{2} + \frac{g_2 - g_2}{2}$$

l'observation des index  $b'$  et  $a'$  donnera aussi :

$$c = \frac{g_3 - g_3}{2} + \frac{g_4 - g_4}{2} ;$$

et la moyenne entre ces résultats reproduira la valeur précédente de  $c$ .

242. Le principe de la répétition des angles, mis en usage avec un goniomètre, atténuera : non seulement, l'incertitude de lecture sur le limbe ; mais encore, les importantes et inévitables erreurs de pointé, auxquelles les multiples mesures offrent des chances de compensation.

Le GONIOMÈTRE RÉPÉTITEUR suppléera donc efficacement : 1.<sup>o</sup> à l'imparfaite division du limbe, particulièrement due à la petitesse de son rayon ; 2.<sup>o</sup> à l'incertitude du pointé, provenant surtout de la longueur des côtés observés. Et, pour qu'un goniomètre serve à la répétition des angles, il faudra que l'alidade et le tuyau visuel-déclinateur puissent se mouvoir et s'arrêter contre la plaque du limbe, rendue fixe ou mobile à volonté.

#### *Le Cercle répétiteur.*

243. Considérons, d'abord, le cercle astronomique, dont la construction (fig. 78) laisse aux lunettes et au limbe une entière indépendance de mouvements brusques ou lents ; supposons que, le goniomètre ayant son limbe fixe et décliné d'une manière quelconque dans le plan d'un angle  $c$ , au moyen d'un alignement auxiliaire imposé à la lunette-déclinatoire, les graduations  $g, g_1$ , correspondent aux coups d'alidade sur les côtés de l'angle : cette première observation fournira  $g_1 - g = c$ .

Fixons, maintenant, au limbe la dernière position  $g_1$  de l'alidade, pour en amener ensuite, par la rotation du limbe, l'axe visuel sur le premier côté de l'angle ; le goniomètre sera décliné suivant ce premier côté, et la lunette-déclinatoire assurera cette position, si on la dirige, par son mouvement propre, sur l'alignement auxiliaire primitivement choisi : tellement que l'alidade reportée alors sur le second côté, par son mouvement particulier, déterminera une autre graduation  $g_2$  ; et l'on aura  $g_2 - g_1 = c$ .

En regardant, pareillement, cette graduation  $g_1$ , comme l'appui d'une nouvelle déclinaison du goniomètre suivant le premier côté de l'angle  $c$ : l'alidade, mise une troisième fois, par son mouvement propre, sur le second côté de cet angle, donnera la graduation  $g_2$ , avec laquelle on formera  $g_2 - g_1 = c$ ; et, en continuant cette manœuvre, il viendra successivement:  $g_3 - g_2 = c$ ,  $g_4 - g_3 = c$ , ..... De sorte que, en ajoutant chacune de ces valeurs de  $c$  avec celles qui la précèdent, on aura :

$$g_1 - g = c, \quad g_2 - g = 2c, \quad g_3 - g = 3c, \quad g_4 - g = 4c, \dots$$

Chaque graduation comportant, d'ailleurs, l'incertitude de lecture  $\frac{p}{2n}$ , § 110 page 63; la combinaison la plus défavorable de ces deux erreurs produira, pour chacun des multiples de l'angle observé, l'incertitude  $\frac{p}{n}$  rendue apparente dans :

$$c = (g_1 - g) \pm \frac{p}{n}, \quad c = \left(\frac{g_2 - g}{2}\right) \pm \frac{p}{2n}, \quad c = \left(\frac{g_3 - g}{3}\right) \pm \frac{p}{3}, \\ c = \left(\frac{g_4 - g}{4}\right) \pm \frac{p}{4n}, \dots$$

C'est ainsi que, en répétant à volonté la mesure de l'angle  $c$ : on portera autant de fois son arc bout-à-bout sur le limbe, pour obtenir un multiple désigné de cet arc par la différence des graduations du premier coup d'alidade au dernier (celui-ci comprenant la somme des circonférences qu'il aura parcourues); et qu'on réduira, à une petitesse voulue, l'erreur d'observation d'un angle: attribuée tant à l'inexacte division du limbe et à l'incertitude de sa lecture, qu'à l'imperfection du pointé de l'observateur.

244. Au lieu de donner une déclinaison quelconque au limbe, dans la première des observations précédentes: on pourra appuyer cette déclinaison sur le premier coup d'alidade, comme on y est astreint dans les mesures suivantes; mais alors, il sera avantageux de mettre d'abord l'alidade à zéro, pour la diriger ensuite sur le premier côté de l'angle, par le mouvement du limbe. La première graduation  $g$  n'étant plus apparente, les graduations des coups d'alidade con-

duits sur le second côté de l'angle seront précisément, à l'incertitude de lecture près  $\frac{p}{n}$ , celles des multiples correspondants de l'amplitude de cet angle, c-à-d, qu'on aura :

$$c = g_1 \pm \frac{p}{n}, \quad 2c = g_2 \pm \frac{p}{n}, \quad 3c = g_3 \pm \frac{p}{n}, \quad 4c = g_4 \pm \frac{p}{n}, \dots$$

245. L'observation de la double mesure d'un angle vient d'exiger *six* mouvements, répartis entre le limbe, l'alidade et la lunette de repère : mais, on réduira ces mouvements à *quatre*, savoir : *deux* au limbe, *un* à l'alidade, et *un* à la lunette-déclinatoire, en prenant alternativement les côtés de l'angle pour alignement de cette dernière.

En effet, le limbe étant mis dans le plan de l'angle  $DCG$  (*fig. 80*) et l'index fixé à la graduation  $g$ , ou *zéro*, dudit limbe : on amènera, par la rotation de ce dernier, l'axe visuel  $rv$  de l'alidade sur le premier côté  $CD$ , tandis que la lunette-déclinatoire  $r'v'$  sera conduite, par son mouvement propre, sur le second côté  $CG$ . Pour suivre la marche précédente : il faudrait actuellement donner sur le second côté  $CG$  le coup d'alidade  $g_1$  destiné, ensuite, à servir d'appui à la déclinaison du limbe suivant le premier côté  $CD$ ; mais, ce coup d'alidade n'ayant, ici, d'autre effet que de diriger son axe visuel sur celui de la lunette-déclinatoire : le transport immédiat, par la rotation du limbe, de ce dernier axe visuel  $r'v'$  sur le premier côté  $CD$  (*fig. 81*), en assurant la seconde déclinaison, évitera le coup d'alidade intermédiaire  $g_1$ ; en sorte que, cette dernière déclinaison étant effectuée, il suffira de donner le coup d'alidade  $g_2$  suivant le second côté  $CG$ , pour que l'index vienne, par un seul déplacement, de la graduation  $g$ , ou *zéro*, à la graduation  $g_2$  double de l'angle  $DCG$ .

246. Le mode d'observation précédent accomplit les deux mesures successives de l'angle  $DCG$ , avec le goniomètre dont le limbe est rendu alternativement fixe et mobile, en conservant la déclinaison sur le même côté de cet angle.

En effet, le goniomètre étant à limbe fixe (*fig. 80*) : j'assure sa déclinaison en appuyant la lunette inférieure  $r'v'$  sur



le second côté  $cg$ , et je donne le coup d'alidade  $g$  sur le premier côté  $cd$ . Soit  $x$  la graduation du coup d'alidade imaginé sur  $cg$ , c'est-à-dire, selon la position actuelle de  $r'v'$ , on aura  $x - g = c$ .

Rendons mobile le limbe du goniomètre : en fixant la lunette inférieure à la plaque du limbe, et en considérant la lunette supérieure comme déclinatoire, § 179 page 106. Pour effectuer la seconde mesure de l'angle  $dcg$ , dont le sens est devenu inverse à la numération du limbe, § 174 page 104 : l'axe visuel  $r'v'$  de la nouvelle alidade étant actuellement sur le premier côté  $cg$ ,  $x$ , qui était précédemment la graduation de l'index, correspondra maintenant au premier coup d'alidade; et l'on donnera le second coup d'alidade de la présente observation : en transportant l'axe visuel  $r'v'$  sur le second côté  $cd$ , au moyen de la rotation du limbe, pendant que la lunette-déclinatoire  $rv$  sera mise et conservée en direction de  $cg$  (fig. 81). Ensorte que:  $g$ , étant alors marquée par l'index, il viendra  $g_2 - x = c$ , dont l'addition avec le résultat  $x - g = c$  de la première mesure, donnera  $g_2 - g = 2c$ .

Cette démonstration rappelle la propriété commune à tous les goniomètres qui se déclinent avec un tuyau visuel indépendant de l'alidade, § 183 page 108.

247. Quand on se proposera d'observer les *multiples-pairs* d'un angle avec le cercle astronomique : après avoir reconnu le genre de division du limbe, le sens de sa numération qui détermine celui de l'angle, § 173, 174 pages 103, 104, et l'incertitude de lecture due au vernier, § 110 page 63; après avoir établi les axes visuels des lunettes parallèlement au limbe, § 160 page 94, et mis le goniomètre en place, § 187 page 112, l'index marquant zéro; on manœuvrera le cercle répétiteur de la manière suivante :

- 1.<sup>o</sup> Diriger, au moyen du limbe, la lunette supérieure sur le premier objet (fig. 80);
- 2.<sup>o</sup> Conduire, par son mouvement propre, la lunette inférieure sur le second objet;

3.<sup>o</sup> Diriger, par la rotation du limbe, la lunette inférieure sur le premier objet (*fig. 81*);

4.<sup>o</sup> Établir, par son mouvement propre, la lunette supérieure sur le second objet;

Après quoi, l'index marquera la double-graduation de l'angle considéré, qu'on se dispensera, même, de lire si l'on veut continuer l'observation des multiples-pairs plus élevés de cet angle.

La coopération simultanée de deux observateurs accélérera beaucoup la manœuvre du cercle répéteur, tout en favorisant sa précision.

Quand l'axe, ou essieu, *cg* sera faussé, par sa non-perpendicularité au plan du limbe (*fig. 78*): il faudra, après chaque rotation du limbe, remettre ce plan dans celui de l'angle, avec les mouvements de rappel *e, f, g*.

248. Les déclinaisons alternatives du cercle répéteur, sur les côtés de l'angle à mesurer, supposent que les excentricités des axes visuels des lunettes sont de nul effet, c'est-à-dire que les alignements observés ont assez d'étendue, § 175 page 104, pour négliger ces excentricités qui, d'ailleurs, s'entre-détruisent presque complètement dans chaque double-mesure; mais on évitera toujours l'excentricité la plus grave: par la manœuvre primitive du cercle, § 243, 244, où la lunette inférieure ne remplit qu'un rôle auxiliaire.

249. Une boussole servira à la répétition d'un angle: quand son limbe *obr'* et son rayon visuel *ro* pourront se mouvoir indépendamment l'un de l'autre (*fig. 77*), en laissant l'aiguille *cg* remplir isolément le rôle de déclinateur spontané, dans les transports successifs de l'axe visuel sur les côtés de l'angle.

Mais, comme le repère de l'aiguille est imparfaitement reconnu, et que cette erreur de déclinaison affecte chaque coup d'alidade; il s'ensuit que la multiple observation d'un angle avec la boussole n'améliorera pas la mesure de cet angle, et qu'on doit, alors, renoncer à la construction d'une boussole-à-répétition.

On répéterait, aussi, la mesure d'un angle avec la planchette : en déclinant successivement le second côté graphique sur l'alignement du premier, pour donner un nouveau coup d'alidade sur l'alignement de ce second côté; mais l'*inutilité* de cette opération est trop évidente, pour qu'on doive jamais destiner la planchette à la multiple observation des angles.

Le rapporteur, qui est employé, à volonté, comme goniomètre à limbe fixe ou mobile, § 92, 220, rend la mesure d'un angle indépendante de l'erreur de marge : en formant la différence des graduations obtenues par la double-manœuvre du § 183; mais cette faculté, qui évite seulement la déclinaison auxiliaire du rapporteur, § 98 page 51, est assez peu utile pour qu'on fasse plus que de la citer.

#### *Les Goniomètres répéteurs à réflexion.*

250. En donnant, au tuyau visuel et au miroir d'un goniomètre à simple-réflexion, des libres mouvements contre la plaque du limbe : ce goniomètre pourra servir à la multiple observation des angles.

En effet, partons de la première mesure d'un angle  $DCG$ , accomplie (fig. 92) par les coups d'alidade-miroir  $g, g_1$ ; le limbe du goniomètre étant fixé, à l'aide de la déclinaison auxiliaire  $rp$ : cette observation fournit  $g_1 - g = c$ , § 206 page 120. Considérons maintenant  $g_1$  comme la graduation du premier coup d'alidade d'une nouvelle observation; en faisant, pour cela, coïncider l'objet auxiliaire  $p$  avec l'image du premier objet  $D$ , par le déplacement du tuyau visuel  $rv$  sur le limbe; le coup d'alidade donné, alors, suivant le second côté  $CG$ , déterminera la graduation  $g_2$  telle que  $g_2 - g_1 = c$ . En reportant encore, par le mouvement propre du tuyau visuel, ce dernier coup d'alidade  $g_2$  sur  $CD$ , on obtiendra un troisième résultat, et la continuation de cette manœuvre produira successivement :  $g_1 - g = c$ ,  $g_2 - g_1 = c$ ,  $g_3 - g_2 = c$ ,  $g_4 - g_3 = c, \dots$  De sorte que, en ajoutant cha-

cune de ces équations avec celles qui la précèdent, il viendra :  $g_1 - g = c$ ,  $g_2 - g = 2c$ ,  $g_3 - g = 3c$ ,  $g_4 - g = 4c$ , .....

Ainsi, on aura transporté l'arc  $c$ , bout-à-bout sur le limbe, pour obtenir un multiple voulu de cet arc, par la différence des graduations du premier coup d'alidade au dernier (celui-ci comprenant toutes les circonférences qu'il aura parcourues, et chaque circonférence représentant 800 grades, § 204 page 119). Et, si l'on a choisi le *zéro* pour graduation primitive  $g$  de l'alidade, en observant le premier coup d'alidade au moyen du mouvement du limbe contre le tuyau visuel : le dernier coup d'alidade, donné sur le second côté  $cg$ , fournira la graduation du multiple correspondant de l'angle  $dcg$ ; lequel multiple sera, bien entendu, affecté de l'incertitude de lecture  $\frac{p}{n}$ , § 172 page 103.

251. L'observation de la double mesure d'un angle, avec le goniomètre à simple-réflexion, vient d'exiger *quatre* mouvements répartis entre l'alidade-miroir et le tuyau visuel; mais on réduira ces mouvements à *deux* : un à l'alidade, et l'autre au tuyau visuel, en prenant alternativement les côtés de l'angle pour alignements de ce tuyau.

En effet, l'index du miroir étant fixé à la graduation  $g$  ou *zéro* du limbe, numéroté de droite à gauche (fig. 95) : je prends le second côté  $cg$  pour direction d'appui, en amenant, par le mouvement propre du tuyau visuel, le second objet  $c$  sur l'image du premier objet  $d$ ; ce qui produit le coup d'alidade  $g$  sur le premier côté. Pour suivre la marche précédente : il faudrait, maintenant, donner sur le second côté  $cg$  le coup d'alidade  $g_1$ , qui servirait ensuite à décliner le goniomètre selon  $cd$ ; or, ce coup d'alidade  $g_1$  n'ayant, ici, d'autre effet que de mettre la face réfléchissante du miroir  $ts$  dans l'alignement  $cg$ , le transport immédiat du tuyau visuel de  $cg$  en  $cd$ , par le mouvement général de l'instrument, (fig. 96), effectuera la déclinaison suivant le coup d'alidade intermédiaire  $g_1$ ; et, l'on terminera la seconde mesure de l'angle  $dcg$  : en donnant, alors, le coup d'alidade sur  $cg$ ,

c-à-d, en faisant tourner le miroir *ts* jusqu'à ce qu'il réfléchisse *g* sur *D*. Mais, comme le déplacement de l'instrument vient de présenter le revers du miroir au point *g*, l'index du dit miroir parcourra: 1.<sup>o</sup> l'arc de *g* en *g*, mesurant l'angle *DCG*; 2.<sup>o</sup> la demi-circonférence graduée  $4^{\text{dr}}$ , pour retourner le miroir bout-pour-bout afin qu'il présente sa face au point *g*; 3.<sup>o</sup> la seconde amplitude de l'angle *DCG*. En sorte que la graduation  $g_1$ , qui correspondra à la réflexion de *g* sur *D*, surpassera *g* de  $(DCG + 4^{\text{dr}} + DCG)$ , ou  $g_1 - g = 2(c + 2^{\text{dr}})$  et  $c = \frac{g_1 - g}{2} - 2^{\text{dr}}$ .

On continuera l'observation des multiples-pairs de l'angle *DCG*: en regardant la dernière graduation  $g_2$  comme l'origine d'une autre mesure; et l'on superposera le second objet *g* sur l'image du premier objet *D*, par le déplacement du tuyau visuel; puis, l'image de *g* sur l'objet *D*, par le mouvement propre de l'alidade-miroir: pour avoir la graduation  $g_4$ , telle que  $g_4 - g_2 = 2(c + 2^{\text{dr}})$ , dont le rapprochement avec le résultat précédent  $g_2 - g = 2(c + 2^{\text{dr}})$  conduit à  $g_4 - g = 4(c + 2^{\text{dr}})$  et  $c = \frac{g_4 - g}{4} - 2^{\text{dr}}$ . Et, ainsi de suite, pour les multiples plus élevés, comme nous l'avons fait avec le cercle astronomique répétiteur, § 245, 247.

252. Ce mode d'observation accomplit les deux mesures successives de l'angle *DCG*, avec le goniomètre à simple-réflexion dont le limbe est rendu alternativement mobile et fixe.

En effet, je considère 1.<sup>o</sup> l'instrument avec son limbe mobile: en fixant le miroir au limbe, et employant le support du tuyau visuel comme repère, contre lequel glissera le limbe servant de base à l'alidade. L'angle *ccD* ayant un sens inverse à la numération du limbe, § 208 page 121, *cc* en sera le premier côté (*fig.* 95); et la graduation *g*, couverte par l'index du miroir, sera supposée appartenir au coup d'alidade selon le tuyau visuel, § 209. Je décline le goniomètre sur le premier côté *cc*: en y dirigeant le tuyau visuel *rv*, par le mouvement général de l'instrument, et je donne

un coup d'alidade-miroir suivant le second côté  $cd$  : en faisant tourner le limbe, sous le tuyau visuel, jusqu'à ce que le miroir  $ts$  réfléchisse  $d$  sur  $c$ . Soit  $x$  la graduation que fournirait, alors, le support du tuyau visuel;  $g$  étant, d'ailleurs, la graduation du coup d'alidade imaginé suivant la position actuelle  $gcd$  du tuyau visuel : on aura  $x - g = gcd$ .

2.<sup>o</sup> Le goniomètre devenant à limbe fixe, par le libre mouvement du miroir sur la plaque du limbe et la pression, momentanément invariable, du tuyau visuel contre cette plaque; pour effectuer la seconde mesure de l'angle  $dcg$ , qui aura, maintenant, le même sens que la numération du limbe (*fig. 96*) : je décline le goniomètre sur le premier côté  $cd$ , en y dirigeant le tuyau visuel par le déplacement général de l'instrument;  $x$ , représentant la graduation précédemment marquée par le support du tuyau visuel, correspondra au coup d'alidade imaginé selon ce tuyau et, par conséquent, suivant le premier côté actuel  $cd$ ; il restera à donner le coup d'alidade  $g_2$  sur le second côté  $cg$ , au moyen du mouvement propre du miroir qui, venu d'abord à la graduation  $(4^d + x)$  par son retournement bout-pour-bout, la dépassera ensuite de l'amplitude  $dcg$ , pour réfléchir le second côté  $cg$  sur le premier  $cd$ . En sorte que nous aurons :  $g_2 - (4^d + x) = dcg$ , dont le rapprochement avec le résultat précédent  $x - g = gcd$  fournira :

$$g_2 - g = 2dcg + 4^d, \text{ ou } g_2 - g = 2(c + 2^d), \text{ et } \frac{g_2 - g}{2} = c + 2^d.$$

253. Le limbe d'un goniomètre à réflexion présentant à volonté, par son retournement, chacun des deux sens de numération, § 211 page 122 : son tuyau visuel pourra s'appuyer sur le même côté d'un angle, pendant la double mesure de cet angle; tandis que l'autre côté recevra, seul, les coups d'alidade-miroir.

Car, la première observation de l'angle  $gcd$  venant d'être exécutée avec le limbe mobile (*fig. 95*) ; si, devant procéder à la seconde mesure de cet angle avec le limbe fixe, on retourne ce limbe sens-dessus-dessous (*fig. 97*) pour changer

l'ordre de sa numération :  $cg$  restera le premier côté de l'angle  $gcd$ , et continuera, par conséquent, à servir d'appui au tuyau visuel pour la nouvelle déclinaison du goniomètre; tandis que le côté  $cd$  recevra, encore, le coup d'alidade qui complètera l'observation.

On a particulièrement recours à ce moyen d'obtenir les multiples-pairs d'un angle  $dcc$  : quand, l'un des objets  $d$ ,  $c$  étant difficile à distinguer, on doit le choisir pour point de mire direct et lui renvoyer constamment l'image de l'autre objet.

254. Un goniomètre à double-réflexion devient répétiteur : par l'indépendance des mouvements propres du grand miroir  $cs$ , et du support  $ra$  commun au tuyau visuel et au petit miroir  $ab$  (fig. 98).

En effet, partons de la première mesure d'un angle  $dcc$  (fig. 92) effectuée avec les coups d'alidade-miroir  $g$ ,  $g_1$ , le limbe du goniomètre étant fixé par la déclinaison  $ad$ ; cette observation fournit  $g_1 - g = c$ , § 215 page 124. Considérons, maintenant,  $g_1$  comme la graduation du premier coup d'alidade d'une nouvelle observation : en faisant coïncider l'objet  $d$  avec son image, par le déplacement du support  $rab$  sur la plaque du limbe ; le coup d'alidade donné alors, suivant le second côté  $cg$ , déterminera la graduation  $g_2$ , telle que  $g_2 - g_1 = c$ . En reportant encore, par le mouvement propre du support visuel, ce dernier coup d'alidade  $g_2$  sur le premier côté  $cd$ , pour donner, ensuite, le troisième coup d'alidade  $g_3$  sur  $cg$  : on obtiendra un troisième résultat. Et la continuation de cette manœuvre produira successivement :  $g_1 - g = c$ ,  $g_2 - g_1 = c$ ,  $g_3 - g_2 = c$ ,  $g_4 - g_3 = c, \dots$  De sorte que, en ajoutant chacune de ces équations avec celles qui la précèdent, il viendra :

$$g_1 - g = c, \quad g_2 - g = 2c, \quad g_3 - g = 3c, \quad g_4 - g = 4c, \dots$$

Ainsi, on aura transporté l'arc  $c$ , bout-à-bout sur le limbe, pour obtenir un multiple voulu de cet arc : par la différence des graduations du premier coup d'alidade au dernier (celui-ci comprenant toutes les circonférences qu'il aura parcou-

rués, et chaque circonférence représentant 8 angles droits, § 204 page 119). Et, si l'on a choisi le *zéro* pour graduation primitive  $g$  de l'alidade : en observant, alors, le premier coup d'alidade, par le mouvement propre du support visuel  $na$ , le dernier coup d'alidade, donné sur le second côté  $cg$ , fournira la graduation du multiple correspondant de l'angle  $ncg$ , lequel multiple sera affecté de l'incertitude de lecture  $\frac{p}{n}$ , § 172.

255. L'observation de la double mesure d'un angle, avec le goniomètre à double-réflexion, vient d'exiger *quatre* mouvements répartis entre l'alidade-miroir et le tuyau visuel ; mais, lorsque les côtés de l'angle seront convenablement grands § 214 page 124, on réduira ces mouvements à *deux* : un à l'alidade, et l'autre au tuyau visuel, en prenant alternativement les côtés de l'angle pour alignements de ce tuyau.

En effet, l'index du grand miroir étant fixé à la graduation *zéro* du limbe, numéroté de gauche à droite (*fig. 98*) : je prends le second côté  $cn$  pour direction d'appui, en faisant coïncider l'objet  $n$  avec l'image du premier objet  $c$ , par le mouvement propre du support visuel  $no$ ; ce qui produit le coup d'alidade *zéro* sur le premier côté  $cg$ .

Pour suivre la marche précédente : il faudrait, maintenant, donner sur le second côté  $cn$  le coup d'alidade  $g_1$ , qui servirait, ensuite, à décliner le goniomètre selon  $cg$ . Or, ce coup d'alidade  $g_1$ , rendant parallèles les miroirs  $ab$ ,  $cs$ , § 214, le transport immédiat du tuyau visuel de  $cn$  en  $cg$ , par le mouvement général de l'instrument (*fig. 99*) effectuera la déclinaison du goniomètre suivant le coup d'alidade intermédiaire  $g_1$ ; et l'on terminera la seconde mesure de l'angle  $cen$  : en donnant un coup d'alidade sur  $cn$ , c'est-à-dire, en faisant tourner le grand miroir jusqu'à ce qu'il réfléchisse  $n$  sur  $c$ ; de sorte que la graduation  $g_2$ , marquée alors par l'index de ce miroir, surpassera la graduation primitive *zéro*, de la double-amplitude de l'angle  $cen$ , ou  $g_2 = 2c$ .



On continuera l'observation des multiples-pairs de l'angle  $gcd$  : en regardant la dernière graduation  $g_2$  comme l'origine d'une autre mesure; et l'on superposera le second objet  $D$  sur l'image du premier  $C$ , par le déplacement du support visuel; puis, l'image de  $D$  sur l'objet  $C$ , par le mouvement propre de l'alidade-miroir, qui marquera la graduation  $g_4$  quadruple de la valeur de  $c$ . Et ainsi de suite, pour les multiples plus élevés, comme nous l'avons pratiqué avec les autres goniomètres répétiteurs, § 246, 251.

On montrera, de même qu'on l'a fait au goniomètre à simple-réflexion § 252, que la précédente observation revient aux deux mesures successives de l'angle  $gcd$  avec le goniomètre à double-réflexion, dont le limbe est rendu alternativement mobile et fixe.

256. On verra, aussi, que la faculté de donner les deux sens de numération au limbe, par son retournement, permettra d'appuyer le tuyau visuel d'un goniomètre à double-réflexion sur le même côté d'un angle, pendant la double mesure de cet angle; tandis que l'autre côté recevra, seul, les coups d'alidade-miroir.

Car, le goniomètre ayant, d'abord, son limbe mobile, et l'index du miroir étant à zéro (*fig. 98*) : la première observation de l'angle  $deg$  s'effectuera par le mouvement du limbe, contre le tuyau visuel dirigé sur le premier côté  $cd$ , c'est-à-dire, en réfléchissant  $C$  sur  $D$ , la numération étant de gauche à droite.

En retournant, alors, le limbe pour en changer le sens de numération (*fig. 100*) : on le laissera fixe pendant la seconde mesure de l'angle  $deg$ , qui s'accomplira en faisant réfléchir, par le mouvement propre du grand miroir  $cs$ , le second objet  $C$  sur l'objet  $D$  resté le premier; de sorte que la graduation  $g_2$ , sur laquelle s'arrêtera l'index du grand miroir, sera la double mesure de  $deg$ .

257. L'incertitude de pointé, que nous avons reconnue au § 217 page 125, s'atténue considérablement par la manœuvre-multiple des goniomètres à réflexion; aussi, ces instru-

ments, dont nous avons fait voir l'imperfection dans les observations simples, acquièrent-ils de l'importance quand ils deviennent répétiteurs. En mer, où l'on emploie principalement les goniomètres à réflexion pour mesurer les distances angulaires d'astres très remarquables, il y a moins d'incertitude sur le pointé; et, en outre, la répétition habile des angles, pendant un court intervalle de temps, fournit une bonne moyenne angulaire pour le temps-milieu des observations.

#### CHAPITRE IV. — DESCRIPTION DES INSTRUMENTS DESTINÉS AU NIVELLEMENT.

##### NIVEAUX ET DÉCLINATOIRES VERTICAUX.

258. On mesure les inclinaisons à la verticale : avec un goniomètre dont le limbe, placé dans un plan vertical, nura été décliné suivant la direction verticale; et l'on parviendra à cette double disposition : en rendant, d'abord, la plaque du limbe perpendiculaire à une horizontale, pour *caler*, ensuite, horizontalement une ligne particulière de cette plaque et déterminer; ainsi, la constante verticalité du rayon perpendiculaire à ladite ligne.

259. La mise en station d'un goniomètre, pour les observations verticales, dépendra donc du moyen de repérer matériellement une direction horizontale, qui, elle-même, se produit *spontanément* par la réalisation de l'un des principes suivants :

- 1.<sup>o</sup> La couche supérieure de tout liquide *en repos*, contenu dans un vase ouvert, est un plan horizontal. Les couches qui terminent un liquide homogène, répandu dans des vases ouverts se communiquant, ou dans les branches *non capillaires* d'un siphon, sont sur le même horizon.
- 2.<sup>o</sup> La direction libre du fil-à-plomb est verticale.
- 3.<sup>o</sup> Plusieurs fluides, *en repos* dans un récipient, sont séparés

par des couches horizontales; et le repos ne devient *stable* qu'autant que le fluide le moins dense occupe la partie supérieure du récipient, celle qui est la plus éloignée du sol.

260. On appelle NIVEAU: l'appareil qui sert à établir une direction horizontale. Et quand, appuyé contre un plan vertical, le niveau est destiné à caler horizontalement une ligne particulière de ce plan, il prend le nom de DÉCLINATOIRE VERTICAL, par analogie au déclinatoire horizontal qui repère la direction spontanée de l'aiguille aimantée, § 192 page 114.

#### *Niveau-d'eau et Déclinatoire-siphon.*

261. Il résulte du premier des principes précédents: que deux points *s* et *t* (fig. 105), marqués sur les parois d'un vase ouvert contenant un liquide, de l'eau par exemple, détermineront une direction horizontale: par la position du vase qui les fera affleurer le liquide en repos; en sorte que, si lesdits points ont été reconnus à égale distance de l'appui *b'a'* du récipient *f'b'a'f*, la dimension correspondante de cet appui sera rendue horizontale, et l'on aura formé un NIVEAU-D'EAU.

Il est évident que le plus ou moins de liquide, alors versé dans le vase, fournira des repères accomplés qui régleront le niveau pour chaque masse de liquide, avec d'autant plus d'exactitude que la distance de ces points sera plus considérable.

262. Afin de rendre le niveau-d'eau plus commode, tout en augmentant sa longueur et sa précision: on lui donne pour récipient un siphon non capillaire, dont les branches transparentes *f, f'* (fig. 105, 106) communiquent par un tuyau *ab*, et montrent, sur le même horizon, les couches terminant l'eau colorée qu'elles contiennent. Le niveau peut, alors, être désigné par NIVEAU-SIPHON.

263. L'agitation atmosphérique s'opposant à la parfaite

immobilité du liquide : chacun des repères  $s$ ,  $t$  du niveau (fig. 106) ne sera pas toujours calé à un millimètre près ; en sorte que la ligne observée  $st$ , de longueur  $L$ , pourra dévier de l'horizon, d'une quantité angulaire dont la tangente  $\frac{2 \text{ millim.}}{L}$  occasionnera à la distance  $D$ , l'erreur de cale  $\frac{D}{L} 2$ , qui, devenant un décimètre quand  $D=50L$ , fait adopter le demi-centuple du tuyau  $L$  pour limite des longueurs repérées avec le niveau ou le déclinateur-siphon.

### Niveau et Déclinatoire-à-perpendicule.

264. D'après le second principe du § 259, on établira verticalement une plaque  $a'cb'$  évidée ou pleine (fig. 102, 103) : par son léger contact avec le fil-à-plomb ou perpendicule  $cx$  ; et, si l'on fait couvrir le perpendicule en repos, par une droite  $ct$  de ladite plaque : cette droite sera verticalement calée et sa perpendiculaire  $b'a'$  deviendra horizontale. En sorte que la plaque ayant deux points de repère : l'un  $c$  pour suspendre le perpendicule, l'autre  $t$  pour être placé sous ce perpendicule en repos, composera un DÉCLINATOIRE-À-PERPENDICULE, qui deviendra niveau : par la disposition rectangulaire de  $ct$  sur l'appui  $b'a'$  de la plaque.

La précision du niveau et du déclinateur-à-perpendicule dépend essentiellement de la distance  $ct$ , qu'on désigne par *apothème* afin de la distinguer du perpendicule entier  $cx$ , rendu plus ou moins long pour que ses oscillations et son immobilité soient plus ou moins sensibles. Et, lorsque le perpendicule aura sa tige inflexible, droite ou courbe  $fcx$  (fig. 102) : on le suspendra par un point quelconque  $c$  de cette tige, et l'on prendra indifféremment l'un ou l'autre des points  $x$ ,  $f$  pour extrémité de l'apothème.

Cet instrument simple a été adopté par les ouvriers, sous le nom de NIVEAU DE MAÇON.

265. L'agitation atmosphérique et le frottement sur la

plaque nuisent trop évidemment à la liberté du perpendiculaire  $c\pi$  (fig. 102), pour qu'on ne doute, à un millimètre près, de la position de l'extrémité  $x$  ou  $f$  de l'apothème  $cx$  ou  $cf$  de longueur  $n$ ; la direction du perpendiculaire  $c\pi$  pourra donc s'écarter de la verticale, d'une quantité angulaire dont la tangente  $\frac{1 \text{ millim.}}{n}$ , ou l'amplitude  $\frac{1 \text{ millim.}}{n} 64$  grades, occasionnera à la distance  $D$ , une erreur de cale  $\frac{D}{n} 1 \text{ millim.}$ , qui, devenant un décimètre quand  $n$  atteindra 100 $n$ , prescrit le centuple de l'apothème pour limite des longueurs convenablement repérées avec le niveau et le déclinatoire-à-perpendiculaire.

#### Niveau et Déclinatoire-à-bulle d'air.

266. En vertu du troisième principe du § 259, les couches distinctes, qui séparent plusieurs fluides en repos dans un vase transparent, étant spontanément horizontales : on pourra marquer les extrémités d'une direction horizontale, contre les parois extérieures du récipient, devenu un niveau par la disposition des repères  $x, x'$  à égales distances de son appui  $B'A'$  (fig. 102, 103).

En donnant, à ce récipient, une forme mince et allongée contenant seulement de l'air et un liquide (ordinairement alcoolique), il constituera un NIVEAU-A-BULLE D'AIR. Et, en réduisant la distance des repères  $x, x'$  à un simple élément  $s'x'$ , par la diminution du volume d'air : cette bulle se calera spontanément dans la partie la plus élevée du tube, lequel, s'il affecte une courbure longitudinale présentant sa concavité au sol, recevra toujours la bulle dans son élément horizontal. De sorte que la tangente, en un point quelconque de la courbure longitudinale du récipient, sera horizontalement calée : en faisant couvrir le milieu de la bulle par ce point.

267. Si donc, on renferme un liquide et une bulle d'air dans un tube de verre longitudinalement courbé  $r'xu'$

(fig. 102, 103), pour engager ledit tube, par sa partie concave, dans une châsse  $Y'U'$  supportée par une règle (fig. 103) ou par des crochets  $A'$ ,  $B'$  (fig. 102) : on aura formé un niveau-à-bulle d'air que complètera le repère  $\tau$  de l'élément tubulaire parallèle à son support  $B'A'$ .

Et, quand on dressera la courbure longitudinale du tube-à-bulle d'air contre une plaque verticale (fig. 113, 114), ce tube deviendra DÉCLINATOIRE-À-BULLE D'AIR.

268. La bulle-d'air  $sx$  (fig. 102, 103), en servant de passage horizontal aux éléments de la courbure longitudinale du tube  $YU$ , pendant les déplacements verticaux de ce tube, détermine, par son milieu, l'extrémité de l'apothème d'un perpendicule, qu'on supposerait accroché au centre  $c$  de courbure longitudinale dudit tube.

Or, cette bulle, à l'abri des agitations atmosphériques, s'arrêtera avec moins d'hésitation qu'un perpendicule, et son milieu sera mieux marqué, sur le tube, que l'extrémité de l'apothème dudit perpendicule sur la plaque; enfin, l'incertitude angulaire  $\frac{1}{R} 64^{\text{millim.}}$  grades et celle de cale  $\frac{D}{R} 1^{\text{millim.}}$  des niveau et déclinatoire-à-perpendicule, § 265, diminueront avec la courbure longitudinale du tube, dont le rayon ou apothème  $R$ , pouvant grandir sans que l'appareil devienne plus volumineux, indiquera la sensibilité et la précision du niveau et du déclinatoire-à-bulle d'air, ainsi présentés comme un perfectionnement du niveau et du déclinatoire-à-perpendicule.

Afin de reconnaître aisément le point occupé par le milieu de la bulle d'air : on compare, à des divisions équidistantes marquées d'avance sur le tube (fig. 107, 115, 119), les extrémités  $s$  et  $x$  de cette bulle, dont la longueur varie inversement à la température atmosphérique.

269. Pour déterminer l'apothème, ou le rayon de la courbure longitudinale d'une partie quelconque du tube ; observons que, le niveau-à-perpendicule étant successivement appuyé sur deux règles  $QN$ ,  $QL$ , situées dans le même vertical

(fig. 104) : l'angle  $\text{NQL}$  de ces règles sera égal à celui des traces  $cx$ ,  $cx'$  du perpendiculaire  $c\pi$  correspondantes aux positions  $abx$ ,  $a'b'x'$  du niveau ; de même, le niveau-à-bulle d'air étant placé sur les règles  $\text{QN}$ ,  $\text{QL}$ , en  $\text{ASB}$ ,  $\text{A'S'B'}$  : l'angle  $\text{NQL}$  sera égal à celui des rayons de courbure  $cs$ ,  $cs'$  qui correspondent aux éléments  $s$ ,  $s'$  successivement calés ; en sorte que

$$\frac{\text{arc } ss'}{\text{apoth. } cs} = \frac{\text{grad. } \text{NQL}}{64^{\text{e}} \text{ grad.}}, \text{ et apoth. } cs = \frac{64^{\text{e}}}{\text{grad. } \text{NQL}} \times \text{arc } ss'.$$

Au défaut de la graduation d'angle  $\text{NQL}$ , § 290 page 166 : on supposera que l'arc  $ss'$ , parcouru par la bulle d'air, se confonde avec sa corde, et l'on mesurera les longueurs  $\text{NL}$  et  $\text{QN} = \text{QL}$ , pour avoir  $\frac{ss'}{cs} = \frac{\text{NL}}{\text{QN}}$  ; d'où  $\text{apoth. } cs = \frac{\text{QN}}{\text{NL}} ss'$ .

270. L'appareil, qui produit l'horizon spontané, ne devenant un niveau, pour caler horizontalement une longueur d'appui, qu'autant qu'il porte les repères d'une direction parallèle ou perpendiculaire à sa base, § 264, 264, 266 : on devra vérifier ou marquer ces repères avant d'employer chaque niveau ; et, quand il ne sera pas commode d'exécuter ce règlement avec le compas et l'équerre, on recourra au procédé suivant.

Supposons que le point  $x$  règle provisoirement le niveau, en considérant ce point : 1.<sup>o</sup> comme trace de la parallèle à la base  $ab$  du niveau-d'eau  $fabf'$  (fig. 105) ; 2.<sup>o</sup> comme repère de l'apothème  $cx$  du niveau-à-perpendiculaire  $cab$  (fig. 102, 103) ; ou 3.<sup>o</sup> comme milieu de l'élément tubulaire parallèle au support  $AB$  du niveau-à-bulle d'air (fig. 102, 103).

En plaçant (fig. 105, 102, 103) chacun des niveaux  $fabf'$ ,  $cab$ ,  $\text{AYUB}$  sur une longueur  $\text{QN}$ , pour la caler au repère provisoire  $x$  ; on reconnaîtra la précision de ce repère : s'il continue à caler les niveaux, après leur retournement *bout-pour-bout*  $f'b'a'f'$ ,  $b'ca'$ ,  $u'b'a'y'$ , sur l'appui  $\text{QN}$ .

Mais dans le cas, presque ordinaire, où le point  $x$  n'affleurerait plus la position spontanément prise : soit par la couche extérieure du liquide dans le premier niveau, soit par le perpendiculaire du second niveau, ou enfin, par la bulle d'air du

troisième niveau : on marquera le nouveau point d'affleurement  $x'$ , et le vrai repère régulateur  $t$  divisera, en parties égales, l'angle  $xx'$  des traces  $cx$ ,  $cx'$  provenant des deux positions symétriques de chaque niveau sur l'appui  $QN$ . En sorte que le milieu de l'espace  $xx'$  déterminera le point  $t$ , d'autant plus exactement que cet espace s'écartera moins de la corde ou de l'arc compris par l'angle  $xx'$ ; ce qui arrivera toujours, si le point provisoire  $x$  a calé une direction  $QN$  *peu inclinée* à l'horizon.

Les niveaux-à-perpendicule et à-bulle d'air (*fig.* 102, 103) resteront, alors, réglés au repère  $t$  : tant que le centre d'oscillation  $c$  du premier niveau, et l'assemblage du tube  $u'r'y'$  sur la base  $n'a'$  du second, ne changeront pas.

Quant au niveau-d'eau  $f'b'a'f$  (*fig.* 105, 106) qui ne peut conserver la même masse de liquide; il devra porter des couples de repères convenant à toute quantité d'eau, § 261 page 151. Et, pour obtenir ces repères, on calera l'appui  $QN$  par le point  $t$  qui vient d'être déterminé, et l'on marquera, aussitôt, le repère correspondant  $s$ ; puis, sans déranger  $QN$ , on fera varier la masse d'eau du récipient, pour désigner, par un même numéro, les deux repères de chaque affleurement.

271. Lorsque le repère  $x$  sera imposé à un niveau : on éprouvera ce point régulateur par le retournement, bout-pour-bout, du niveau sur une direction  $QN$ , qu'il aura d'abord servi à caler (*fig.* 105, 102, 103); et l'on modifiera la base  $b'a'$  ou  $n'a'$ , jusqu'à ce que, ledit niveau restant appuyé sur  $QN$ , l'horizontale ou la verticale spontanée affleure le milieu de  $xx'$ .

Par suite, une direction  $QN$  sera horizontalement dressée en même temps qu'on réglera le niveau au repère assigné  $x$ : en la calant d'abord avec ce niveau, qui, retourné ensuite bout-pour-bout, donnera un autre point d'affleurement  $x'$ , dont le transport en  $x$ , moitié par la modification de la base  $b'a'$  ou  $n'a'$ , moitié par le mouvement propre de la direction d'appui  $QN$ , accomplira le double résultat demandé.

272. La trace horizontale d'un plan se trouvera : en fai-



sant glisser la base du niveau sur ce plan, jusqu'à ce que le repère soit calé.

On dressera horizontalement un plan : en rendant simultanément horizontales deux droites non parallèles de ce plan. Et, pour faciliter cette disposition, on y soumettra des lignes perpendiculaires entre elles : afin que l'une, étant calée avec le niveau, ne soit pas dérangée par le mouvement de bascule que subira l'autre pour satisfaire à ce niveau.

273. L'aiguille aimantée, suspendue par son centre de gravité, s'inclinant *d'elle même* d'une quantité constante; on conçoit la possibilité de modifier cette inclinaison, au moyen d'un contrepoids  $k$  (fig. 82, 87) qui éloigne le centre de gravité, du pivot d'oscillation. Si donc, on déplace ledit centre de gravité, jusqu'à ce que les pointes de l'aiguille soient également distantes d'une règle horizontale : cette aiguille deviendra un niveau spontané, dans sa direction déclinoire, et servira à caler horizontalement le limbe d'un goniomètre, § 193 page 115 et § 197 page 116.

## LES NIVEAUX VISUELS.

274. On rendra un niveau, propre à repérer horizontalement une direction visuelle : en faisant servir la règle  $qn$  (fig. 106) d'appui commun, à ce niveau et à un tuyau visuel dont l'axe  $rv$  aura été disposé parallèlement audit appui par le procédé du § 160 page 94. Car, il suffira de dresser horizontalement la règle  $qn$ , pour que l'axe visuel devienne lui-même horizontal.

Afin de caler facilement la règle  $qn$  : on l'assemble sur une traverse  $eg$ , au moyen d'une charnière  $x$  et d'une vis de rappel  $cg$ ; cette traverse s'adaptant au genou  $d$  d'une douille  $df$  que l'on place sur un trépied.

On pourra, encore, appuyer immédiatement le niveau sur le tuyau visuel cylindrique  $av$  (fig. 107), qu'on engagera, alors, dans deux anneaux brisés  $q, n$  susceptibles de presser ce tuyau, en se fermant avec les vis  $q, n$ . On fixe

ces anneaux au-dessus de la règle  $QN$  (*fig.* 106); ou bien, ils sont réunis par une tige courbe  $QEN$  (*fig.* 107) qui, liée, par les branches  $SE$  et  $SE$ , à l'arc denté  $ss$ , bascule sur un pivot  $E$  dans les joues d'une douille évidée  $EF$ , à laquelle tient la vis d'engrenage  $cg$ . On réglera l'axe visuel parallèlement à l'axe de figure du tuyau : en faisant tourner celui-ci dans ses collets  $Qq$ ,  $NN$ , comme on l'a montré pour le tuyau d'épreuve, § 160; en sorte que la direction horizontale de l'axe visuel correspondra à la position calée de son tuyau.

275. Un niveau visuel sera immédiatement réglé *pour de courtes distances* : en dirigeant son axe visuel sur un horizon *sensible* beaucoup plus étendu que ces distances, et en marquant, alors, le repère du niveau.

276. La transparence des fioles  $F$ ,  $F'$  du niveau-siphon (*fig.* 101) permettant d'appuyer un rayon visuel  $rv$  sur les extrémités du liquide en repos; ce siphon, soutenu par un pied, devient aussitôt niveau visuel, qui, employé dans les distances inférieures au demi-centuple de son tuyau, § 263 page 152, aura l'avantage de se caler spontanément. Mais, à cause des onglets  $tq$  et  $sv$ , formés aux extrémités des colonnes du liquide en vertu de son adhésion aux parois des fioles, l'observateur se placera à une petite distance du niveau et dirigera son rayon visuel  $r'v'$  tangentiellement aux bases  $t'q'$ ,  $s'v'$  des onglets; ce qui peut se faire de quatre manières.

Lorsque, après avoir transporté le niveau-d'eau visuel, on voudra le mettre en station; on chassera, d'abord, du liquide les bulles d'air qui, pendant le transport, auraient détruit son homogénéité : en débouchant une des fioles  $F'$  et donnant au tuyau  $AB$  une position rapprochée de la verticale. Après quoi, on posera ce tuyau, sur son pied  $E$ , de manière à laisser paraître le liquide dans la fiole ouverte  $F'$ ; et l'on débouchera graduellement l'autre fiole  $F$ , en évitant les secousses qui répandraient le liquide.

277. Quand on emploiera le niveau-siphon à repérer visuellement des points d'un même alignement : il suffira que

les fioles  $F, F'$  ne soient pas capillaires; quelles que soient leurs formes, la différence de leurs capacités et la place de la douille  $E$  sur le tuyau  $AB$  (fig. 101). Mais, lorsqu'on aura à diriger, en une même station, le niveau sur plusieurs alignements: les horizontales visuelles devront rester dans le même plan; ce qui exigera des conditions entre les longueurs des bras  $AN, BN$ , la forme, la position et les capacités des fioles  $F, F'$ .

Pour déterminer ces conditions: cherchons la valeur générale de la distance  $nk$  du point d'appui  $n$  à l'horizontale  $rv$ , qui correspond à une position quelconque du niveau  $FABF'$  formé par un volume  $Q$  de liquide. Désignons par  $\delta$  l'inclinaison zénithale du tuyau  $AB$ , par  $h$  et  $h'$  les distances des extrémités  $A$  et  $B$  à l'horizontale  $rv$ ; faisons  $kn = x$ ,  $AN = R$ ,  $BN = R'$ ; nous aurons d'abord:

$$h - x = R \cos \delta \quad \text{et} \quad x - h' = R' \cos \delta.$$

Le liquide, répandu dans le siphon  $FABF'$ , remplit le tuyau de communication  $AB$  et une partie des fioles  $F, F'$ ; soit  $v$  le volume du tuyau,  $s$  et  $s'$  les surfaces de sections moyennes imaginées dans les fioles, tellement que les capacités occupées par le liquide soient  $sh$  et  $s'h'$ ; il viendra aussi:  $sh + s'h' + v = Q$ , qui, recevant les valeurs de  $h$  et  $h'$ ,

fournit :

$$x = \frac{Q - v}{s + s'} + \left( \frac{s'R' - sR}{s + s'} \right) \cos \delta.$$

Or, en supposant que, dans une même station, la composition du niveau ne change pas, c'est-à-dire que le siphon conserve le volume  $Q$  du liquide: l'inclinaison  $\delta$  fera seule varier  $x$ , ou la position de l'horizontale visuelle  $rv$ ; et la distance entre les horizontales visuelles, données par les inclinaisons  $\delta', \delta''$  du tuyau  $AB$ , aura pour expression:

$$\begin{aligned} (x' - x'') &= (\cos' \delta - \cos \delta'') \left( \frac{s'R' - sR}{s + s'} \right) \\ &= 2 \left( \frac{s'R' - sR}{s + s'} \right) \sin \left( \frac{\delta'' + \delta'}{2} \right) \sin \left( \frac{\delta'' - \delta'}{2} \right) \end{aligned}$$

d'autant plus appréciable que les inclinaisons  $\delta'$ ,  $\delta''$  différeront davantage entre elles.

Supposons par exemple :  $r' = r = 0^m,8$ ,  $s' = 3s$ ;  $(x' - x'')$  deviendra  $0^m,4 \times \sin\left(\frac{\delta'' + \delta'}{2}\right) \sin\left(\frac{\delta'' - \delta'}{2}\right)$ ; et, dans le cas des inclinaisons  $\delta' = 88$  grades,  $\delta'' = 105$  grades, on aura :  $(x' - x'') = 0^m,1$ .

Pour que le même plan contienne toutes les horizontales observées autour d'une station : il faudra donc annuler  $(x' - x'')$  au moyen de l'une des hypothèses  $\cos \delta' - \cos \delta'' = 0$ ,  $s'r' - sr = 0$ . Par conséquent, ces horizontales seront à la même hauteur : 1.<sup>o</sup> pour des plongées égales du tuyau  $AB$ , quelles que soient les formes des fioles  $r$ ,  $r'$  et la position du pivot de rotation  $n$ ; 2.<sup>o</sup> pour la condition  $s'r' = sr$ , qui, produisant  $x = \frac{Q - v}{s + s'}$ , donne les valeurs constantes :  $s = \left(\frac{Q - v}{r + r'}\right) \frac{r'}{x}$ ,  $s' = \left(\frac{Q - v}{r + r'}\right) \frac{r}{x}$ ; d'où on conclut : que la forme prismatique sera imposée aux fioles  $r$ ,  $r'$ , dans l'étendue susceptible d'être occupée par le liquide; que ces fioles devront être parallèles l'une à l'autre, et avoir leurs bases  $s$ ,  $s'$  inversement proportionnelles aux longueurs des bras  $r$ ,  $r'$ , aux extrémités desquels sont ajustées lesdites fioles.

Et, en particulier, un niveau-siphon à bras égaux conservera sa ligne d'observation visuelle sur le même plan horizontal, dans les différentes plongées de son tuyau : quand ses fioles seront prismatiques, disposées parallèlement entre elles, et auront leurs bases équivalentes.

### La Mire.

278. La hauteur du niveau visuel arrêtant, dans l'espace, une extrémité de la direction horizontale observée avec cet instrument; on en repérera l'autre extrémité à l'aide d'un *Voyant*, consistant en une plaque *abc* de bois ou de tôle

(fig. 116, 117) peinte en deux ou en quatre compartiments qui font distinguer la ligne de mire  $a$ .

On estime l'élévation de cette ligne sur le sol : en appuyant le voyant contre une tige verticale et graduée  $fp$  (fig. 116). Le bord  $bc$  du voyant sert d'index, en sorte que l'origine  $o$  des graduations de  $fp$  est à une distance du pied  $p$ , marquée par celle de  $bc$  à la ligne de mire  $a$ . L'ensemble du voyant et de la tige porte le nom de *Mire*.

279. Pour augmenter commodément la hauteur d'une mire : on en fixe le voyant à l'extrémité  $a$  de sa tige, qui, taillée en coulisse (fig. 117), se meut dans la rainure d'un montant  $pf$  de même longueur. Cette tige est, alors, divisée sur les deux faces qui sont parallèles au voyant ; les graduations de l'une  $ae$  ont leur zéro à l'extrémité  $e$  opposée au voyant, tandis que la numération de l'autre face  $a'e'$  part de l'extrémité  $a'$  qui correspond à la ligne de mire, et a pour cote la longueur du montant  $pf$  ou de la tige  $a'e'$ .

De cette manière, l'extrémité la plus élevée du montant  $pf$  servira toujours d'index, pour lire la distance de la ligne de mire au sol : car, si l'horizontale du niveau rencontre le montant  $pf$  en  $a$  (fig. 118), sa distance  $pf$ , au sol  $f$ , sera égale à  $ep$ , dont on verra la graduation à l'extrémité  $p$  ; et, dans le cas où l'horizontale d'observation s'élèvera au-dessus du montant, il faudra renverser l'instrument en  $p'f'$ , et la ligne de mire  $a'$  aura pour distance au sol la quantité  $(p'f' + f'a')$ , qui sera encore lue à l'extrémité supérieure  $f'$  du montant.

Les figures 117 et 118 représentent une mire pouvant donner une élévation de quatre mètres, le montant  $pf$  et la tige  $ae$  étant de deux mètres. Cette tige est divisée en centimètres, numérotés de dix en dix. L'extrémité  $a'$  est cotée vingt décimètres.

Pour faciliter au porte-mire la lecture des graduations par le bout  $f'$ , le montant s'y termine en biseau. On peut même tracer, contre les extrémités  $p$  et  $f'$  (fig. 118), des verniers  $pv$ ,  $f'v'$  propres à donner les doubles-millimètres ;

ce qui exige que le bout  $f'$  de la large face du montant soit évidé dans la longueur du vernier.

### LES ÉCLIMÈTRES SIMPLES.

#### *Généralités.*

280. Tout goniomètre porteur d'un déclinateur vertical, pour servir à la mesure des angles verticaux, prend le nom d'ÉCLIMÈTRE, ayant son limbe fixe ou mobile: selon que l'alidade sera séparée du limbe pendant que le déclinateur vertical tiendra à sa plaque, ou que l'alidade fera corps avec le limbe pendant que le déclinateur en sera détaché, § 169 page 102.

L'éclimètre-à-siphon présente si peu de commodité et de précision, qu'on n'a dû s'occuper que des éclimètres-à-perpendiculaire et à-bulle d'air.

281. Les inclinaisons à la verticale ne dépassent jamais deux droits, et l'on choisit ordinairement le *zénith* pour origine de ces inclinaisons: ce qui exige que la numération de l'éclimètre à limbe fixe augmente et que celle de l'éclimètre à limbe mobile diminue, dans le sens de *haut-en-bas* par rapport à la direction observée; sauf à tourner la face du limbe vers la gauche ou vers la droite de l'observateur, selon le sens de numération de ce limbe vu par sa partie concave. C'est ainsi que l'éclimètre, numéroté de droite à gauche, devra présenter sa face à gauche (fig. 112) quand il aura son limbe fixe, § 173 page 103, et à droite (fig. 111) lorsqu'on l'emploiera avec son limbe mobile, § 174 page 104.

282. L'éclimètre sera en *station* à un point: 1.<sup>o</sup> par sa *mise en place*, consistant à faire coïncider son centre avec ledit point et à établir son limbe verticalement; 2.<sup>o</sup> par sa *déclinaison* conservant la même cale au déclinateur vertical, § 171 page 103.

283. On aura égard aux excentricités qui affectent l'axe

visuel et l'index des éclimètres, comme on l'a fait pour les goniomètres, aux § 175, 176 pages 104, 105.

Mais, on pourra se dispenser d'un tuyau d'épreuve pour établir l'axe visuel parallèlement au limbe de l'éclimètre, en réglant directement cet axe visuel. Car, le limbe présentant sa face à gauche dans le plan vertical d'une *longue* direction  $nq$ , observée avec l'axe visuel  $rv$  (fig. 112), et sa position étant repérée sur l'appui  $uzd$  (fig. 79); si on le met face à droite par le retournement bout-pour-bout du repère  $ud$ : l'axe visuel  $rv$  (fig. 111), ramené du côté de  $q$ , s'en écartera en raison de sa double-obliquité sur le limbe; de sorte qu'on détruira cette obliquité: en coupant, par son milieu, l'intervalle du point  $q$  à la nouvelle position de  $rv$ , au moyen de la vis réticulaire de cet axe visuel, qu'on vérifiera en recommençant l'expérience précédente, évidemment semblable à celle du § 160 page 94, à la disposition près de l'appui du tuyau visuel.

284. L'inclinaison zénithale d'une direction ayant pour mesure la différence des graduations des coups d'alidade propres à cette direction et à la verticale; la connaissance préliminaire du coup d'alidade, *imaginé* suivant le rayon zénithal qui décline l'éclimètre, réglera cet instrument: en réduisant à un seul coup d'alidade l'observation d'un angle zénithal quelconque.

Or, si, à une station de l'éclimètre, on connaît l'inclinaison zénithale  $\delta$  d'une direction  $nq$  (fig. 112), et qu'on donne, sur cette ligne, un coup d'alidade produisant la graduation  $g''$ : soit  $x$  la graduation du coup d'alidade *imaginé* sur la verticale  $cz$ , correspondant à la cale  $\tau$  du déclinaire-à-bulle d'air  $ury$ , ou au repère  $t$  du déclinaire-à-perpendicule  $et\pi$  assemblé à la plaque de l'éclimètre au moyen des pièces mobiles  $e, t$ : on aura  $g'' - x = \delta$ , et  $g'' - \delta = x$  qui restera invariable tant que le déclinaire vertical conservera la même place contre la plaque du limbe, § 181 page 107; et cette graduation  $x$  deviendra *zéro*: par  $g'' = \delta$ , § 184 page 109, c'est-à-dire, en mettant d'abord l'index à

la graduation  $\delta$  (fig. 113), pour établir ensuite, par le mouvement de la plaque, l'axe visuel  $rv$  sur la direction d'appui et caler, par son mouvement propre, le déclinateur vertical  $yru$  ou  $et\pi$  à son repère  $r$  ou  $t$ .

Il est évident que la graduation  $(x + 1^d)$  appartiendra au coup d'alidade horizontal  $r'e'$  (fig. 113), dont l'index, fixé au limbe, transformera l'éclimètre en niveau visuel, § 274 page 157.

285. On obtiendra l'inclinaison zénithale préliminaire  $zcq$  (fig. 111): 1.<sup>o</sup> par les distances horizontale et verticale de deux points de la direction  $cq$ ; 2.<sup>o</sup> par la double-mesure de cette inclinaison zénithale: en rendant la verticale de repère de l'éclimètre, d'abord second, puis premier côté de ladite inclinaison, § 182 page 108.

La distance horizontale  $d$  des points  $c$ ,  $q$  et leur distance verticale  $k$  fournissent  $\frac{d}{k} = \text{tg } \delta$ , § 16 et 327; et l'inclinaison zénithale  $\delta$  sera ordinairement assez exacte, en la tirant de la Table des quintuples tangentes du § 309 page 180.

286. Pour avoir la double-mesure de l'angle zénithal régulateur  $zcq$ , avec un éclimètre à limbe fixe numéroté de droite à gauche (fig. 111): l'observateur tournera, d'abord, la face du limbe à sa droite en regardant le point  $q$ ; et, le déclinateur vertical  $yru$  ou  $et\pi$ , fixé à la plaque, étant calé à son repère  $r$  ou  $t$  par la rotation du limbe, le rayon zénithal fictif  $cx$  sera le second côté de l'angle zénithal  $qcz$ . De sorte que, en donnant alors le coup d'alidade  $g$  sur  $cq$ , et désignant par  $x$  la graduation du coup d'alidade imaginé selon  $cx$ , par  $\delta$  l'amplitude de l'angle  $qcz$ ; on aura  $\delta = x - g$ .

Quant à la seconde mesure de cet angle: on rendra le rayon zénithal  $cx$  premier côté dudit angle, en tournant le limbe face à gauche (fig. 112) et calant le repère  $r$  ou  $t$  du déclinateur  $yru$  ou  $et\pi$ , par le mouvement de la plaque de l'éclimètre, le coup-d'alidade propre au rayon  $cx$



conservera sa précédente graduation  $x$ ; et,  $g''$  étant la graduation d'un nouveau coup d'alidade sur  $cq$ , il viendra :  $\delta = g'' - x$ , dont la combinaison avec le premier résultat  $\delta = x - g$  fournit  $2\delta = g'' - g$  et  $\frac{g'' - g}{2} = \delta$ , qui ne dépendra pas de la place du déclinateur vertical sur la plaque de l'éclimètre.

287. Dans le cas où l'on n'emploiera l'éclimètre que sur des directions très courtes, relativement aux bornes d'un horizon sensible : cet horizon, propre à servir d'appui commun au repère-déclinateur et à l'axe visuel, § 180 page 107, suffira à la direction  $r'v'$  du coup d'alidade préliminaire, qu'il sera avantageux de marquer à la graduation  $1^d$ , § 284.

288. Le parallélisme de l'axe visuel sur le limbe de l'éclimètre et la disposition verticale de ce limbe sont, ordinairement, assez peu assurés pour qu'on cherche à apprécier les erreurs dont les observations peuvent être affectées.

Or, à cause de ces chances d'erreur, le plan oblique  $zcq$  (fig. 111) sera substitué au plan vertical  $zcq$ , et l'angle  $zcq$ , formé par  $cq$  avec la perpendiculaire  $cz$  à l'horizontale dans le plan oblique, remplacera l'inclinaison zénithale  $zcq$ ; en sorte que la graduation  $g$ , fournie par l'index, devra être corrigée de la différence entre les angles  $z\epsilon q$  et  $zcq$ , laquelle différence est la réduction de l'angle oblique  $zcq$  au plan vertical passant par  $cq$ .

Mais cette réduction ( $\delta - \Delta$ ), d'un angle  $\delta$  au plan qui contient l'un de ses côtés, a été trouvée, § 65 page 32 :  $\frac{\delta - \Delta}{1} = \frac{\cot \delta}{\sin 1} \text{ tg } i \text{ tg } \frac{i}{2}$ ,  $i$  mesurant l'obliquité du plan d'observation sur la verticale.

Et ce résultat montre que la correction ( $\delta - \Delta$ ), toujours très petite pour une faible erreur  $i$ , sera d'autant plus négligeable que l'angle observé  $\delta$  se rapprochera davantage d'un droit ; ce qui a presque toujours lieu dans les observations géodésiques.

289. Lorsque l'horizon sensible d'un lieu de station  $c$  (fig. 93) s'étendra à une grande distance  $ch$  : l'inclinaison

zénithale  $zcd$  d'une direction  $cd$  sera le complément à un droit de l'angle  $dch$ , formé par cette direction avec l'horizon; et il n'y aura pas besoin de déclinatoire vertical, pour qu'un goniomètre serve à la mesure dudit angle. Au défaut d'horizon naturel convenablement étendu, on pourra employer un horizon artificiel réfléchissant : tel que la surface d'une eau tranquille, ou celle d'un miroir plan  $if$  posé sur une masse de mercure contenue dans une cuvette; l'angle  $dch$  sera la demi-mesure de  $dca$ . Mais, comme l'œil de l'observateur devra être élevé sur le plan  $if$ , pour apercevoir l'image  $c$  de  $d$  : on mesurera en  $o$  l'angle  $dog$ , ne différant de  $dca$  que d'une réduction au centre très petite et ordinairement négligeable.

290. Nous terminerons les généralités sur les éclimètres, par l'expérience qui fournit la graduation de la courbure du tube-à-bulle d'air employé comme déclinatoire vertical : laquelle graduation mesure l'angle dont on s'est servi, § 269 page 154, pour calculer le rayon de courbure, ou apothème, limitant la précision des niveaux et déclinatoires-à-bulle d'air.

L'éclimètre étant décliné à un repère  $s$  du tube (*fig.* 109), donnons un coup d'alidade  $g$  sur une direction  $cn$ , et désignons par  $x$  la graduation du coup d'alidade vertical, pour avoir :  $g - x = \text{incl. } zcn$ .

Changeons maintenant, par la rotation du limbe, la déclinaison de l'éclimètre de  $s$  en  $s'$  (*fig.* 110), et répétons, sur  $cn$ , le coup d'alidade qui prendra la graduation  $g'$  pendant que  $x'$  deviendra la graduation du coup d'alidade vertical; nous obtiendrons alors :  $g' - x' = \text{incl. } zcn$ , dont le rapprochement avec le précédent résultat produira  $(g' - g)$  pour valeur de l'angle  $(x' - x)$  des deux rayons  $sc'$ ,  $s'c'$  qui embrassent l'arc  $ss'$ , dont la graduation sera ainsi déterminée.

On pourra, dans cette opération : ou former avec l'index de l'alidade la différence de déclinaison  $(g' - g)$ , pour mesurer l'arc  $ss'$  qui en résultera : ou bien, transporter la cale de  $s$  en  $s'$  pour conclure ensuite  $(g' - g)$ .

On voit, aussi, que l'une des extrémités  $e$  de la bulle d'air, se déplaçant comme son milieu  $s$  (*fig.* 109), procurera précisément l'intervalle  $ee'$  égal à  $ss'$  (*fig.* 110).

### *L'Éclimètre astronomique.*

291. La construction d'un éclimètre est perfectionnée, en raison de l'exactitude qu'on attend de cet instrument.

Pour les observations les plus délicates, on rend éclimètre le cercle astronomique décrit au § 186 page 111 : en vissant un niveau-à-bulle d'air  $zx$  sur l'enveloppe de l'essieu  $cq$  (*fig.* 79), et d'un tube-à-bulle d'air  $hl$  sur la lunette  $r'v'$  servant de repère-déclinateur au goniomètre.

On règle le niveau  $zx$ , destiné à caler horizontalement l'essieu  $cq$  et verticalement le plan du limbe : soit en établissant verticalement le limbe avec un fil-à-plomb, pour marquer, ensuite, le repère  $x$  du niveau : soit en retournant bout-pour-bout ce niveau sur l'enveloppe cylindrique  $cq$ , dont on l'aura préalablement détaché, pour caler horizontalement cette enveloppe, par les mouvements de rappel  $e$  et  $t'$ , § 271 page 156, et fixer en fixant, ensuite, ledit niveau  $zx$  sur le cylindre  $cq$ , afin de marquer la place de sa bulle, ou de faire couvrir cette dernière par un repère désigné du tube, au moyen de la vis  $x$  qui assemble ce tube à sa base.

292. La mise en place de l'éclimètre astronomique consiste : à établir son centre au point de station ; et à disposer le limbe dans le plan vertical de la direction qu'on doit observer, en amenant l'axe visuel sur cette ligne, par la rotation de la fourche  $ass'n'$  autour de la colonne  $y$  (*fig.* 79), et en calant alors, avec les vis  $t'$  et  $e$ , l'essieu  $cq$  au repère  $x$  qui vient d'être donné à son niveau  $zx$ .

Cette mise en place conviendra à toutes les observations dans divers alignements d'une même station : si on commence par dresser verticalement la colonne  $y$ , autour de laquelle s'effectue la rotation de l'éclimètre et que l'on suppose perpendiculairement assemblée au plateau  $uzd$  (*fig.* 79).

Or la colonne  $y$  deviendra verticale par la disposition horizontale du plateau; et, pour parvenir à ce résultat : on considérera la règle  $ud$  comme base d'un niveau-à-bulle d'air ayant  $lth$  pour tube, et on arrêtera le limbe parallèlement à la fourche  $nss'n'$ , que l'on mettra dans l'alignement d'une branche  $fz$  en remarquant la place de l'index  $d$  sur le plateau. On calera, ensuite, le tube  $lh$  au repère  $\tau$  : soit par le mouvement de son support  $r'o'$ , ou par celui de la vis  $f$ ; puis, on retournera le niveau bout-pour-bout, en faisant prendre à l'index  $d$  la position diamétralement opposée  $u$ . Et il ne s'agira plus, pour rendre le diamètre  $ud$  horizontal, que de ramener le repère  $\tau$  sur la bulle : moitié par la vis  $f$  et moitié par le mouvement propre de la châsse  $r'o'$  § 271 page 156. Le niveau  $dtrhu$  ayant, d'ailleurs, été réglé au repère  $\tau$  par cette expérience : on calera, aussitôt, un autre diamètre du plateau  $dxu$  par le mouvement des vis  $e$  et  $g$ ; et l'on aura vérifié l'horizontalité de ce plateau, qui rendra la colonne  $y$  verticale : quand la bulle d'air sera restée immobile, pendant une révolution entière de l'éclimètre autour de cette colonne; ce qui n'arrivera pas si ladite colonne est *faussée*, par sa non-perpendicularité au plateau  $uzd$ .

293. Il résultera, même, de cette disposition préliminaire de la colonne  $y$  : qu'on réglera le niveau  $zx$  au repère  $x$ , sans le détacher de l'enveloppe  $cq$  ni recourir au fil-à-plomb.

On regardera, en effet, l'axe  $cq$  (fig. 79) comme base d'un niveau  $cxq$ ; et l'on amènera le repère  $x$  sur la bulle, au moyen de la vis  $t'$ , en remarquant la place alors occupée par l'index  $d$  sur le plateau  $dxu$ . On retournera, ensuite, le niveau bout-pour-bout : en faisant mouvoir la fourche  $nss'n'$  autour de la colonne  $y$ , *conservée verticale*, jusqu'à ce que l'index prenne la position diamétralement opposée  $u$ ; et l'on n'aura plus qu'à rappeler le repère  $x$  sur la bulle : moitié par la vis  $t'$ , et moitié par la vis  $z$  qui fixe le tube  $zx$  à l'enveloppe de  $cq$ .

*Les Éclimètres topographiques.*

294. Quand on n'aura à mesurer que des inclinaisons zénithales peu différentes de l'angle droit : l'index de l'éclimètre portera sur un petit arc du limbe, auquel il suffira de donner, en topographie, une étendue de 50 grades, du n.<sup>o</sup> 75 au n.<sup>o</sup> 125 (*fig. 115, 119*).

On appuie, alors, l'éclimètre sur un trépied dont la douille *y* se fixe à un plateau *wd* (*fig. 114*), au bord duquel s'engagent les vis *u*, *s* de la tige *xuqs*, traversée par l'axe ou essieu *cq* commun à la plaque *tcb* et à l'alidade. La chasse *th* du tube-à-bulle d'air tient à cette plaque, au moyen de la charnière *k* et de l'écrou *e*, que meut une vis *p'* passant par le collet *f*. La vis *p*, boulonnée en *x* à la tige *xuqs*, procure un mouvement de rappel à la plaque *tcb*, autour de l'essieu *cq*, par l'écrou *e'* qui est soudé à cette plaque. Enfin, le tuyau visuel *rv* aura un mouvement de rappel particulier *t*, qui s'y adaptera à volonté.

Le limbe de l'éclimètre *topographique* pouvant dévier légèrement de la position verticale, sans occasionner d'erreur appréciable dans les angles zénithaux, presque droits, qu'il est destiné à mesurer, § 288 page 165; il suffira de caler verticalement ce limbe, à vue, sans niveau-essieu ni fil-à-plomb.

En dressant ledit éclimètre sur la boîte de la boussole employée aux détails topographiques (*fig. 115*) : le tuyau visuel deviendra commun à ces deux instruments, et l'on pourra observer simultanément les coups d'alidade horizontaux et verticaux.

On donne environ 24 centimètres à la dimension principale *tb* de la plaque *tcb* (*fig. 115, 119*). Et, si le limbe a son centre au milieu de cette plaque (*fig. 115*), avec un rayon de 12 centimètres : il pourra être divisé en demi-grades, § 112 page 64, et le vernier *dix* de l'alidade fera estimer deux centigrades et demi. Tandis que le pi-

vot  $c$ , ou centre du limbe, étant au bord de la plaque (*fig. 119*): ce limbe, de rayon 20 à 22 centimètres, sera distinctement partagé en quarts de grade, dont on appréciera le vingtième, ou environ *un centigrade*, avec le vernier *dix*.

295. On obtiendra, par sa double mesure, l'inclinaison zénithale destinée au réglément de l'éclimètre topographique à bulle d'air: quand son index pourra marquer alternativement les extrémités d'un diamètre du limbe, comme dans les figures 114 et 115, où les deux graduations diamétrales  $100^s$ ,  $300^s$  ont été préalablement tracées; car il ne s'agira que de répéter l'observation du § 286 page 164.

Ainsi, l'index  $b$  étant, d'abord, mis à la graduation  $300^s$  (*fig. 114*): on placera, à vue, le limbe dans le vertical d'une direction, choisie *peu inclinée* à l'horizon à cause du *petit* déplacement permis au tube  $lh$ ; et on établira l'axe visuel  $rv$  sur cette direction, par le mouvement du limbe aidé de la vis  $px$ , pour remarquer, ensuite, le point du tube calé par la bulle d'air, ou pour caler un repère désigné  $\tau$  avec la vis  $p'f$ .

Puis, on amènera à droite (*fig. 115*) la face du limbe, que sa numération de gauche à droite avait d'abord fait présenter à gauche, § 281; et l'on conservera, avec la vis  $p$ , le repère  $\tau$  sur le milieu de la bulle d'air. Après quoi, on mettra l'axe visuel sur la direction primitive  $rv$ , par son mouvement propre aidé de la vis de rappel  $t$ ; ce qui fera parcourir la double inclinaison zénithale à cet axe visuel, en transportant l'index  $b$  sur la graduation  $g''$  telle que  $(g'' - 300^s)$  ou  $(100^s + g'')$  sera la double amplitude de l'inclinaison zénithale  $\delta$  de  $rv$ , et  $\delta = \frac{100^s + g''}{2}$ .

Il restera, donc, à faire marquer cette graduation  $\delta$  par l'index  $b$ , et à diriger l'axe visuel en  $rv$  par le mouvement du limbe, § 284 page 163, pour que le repère  $\tau$ , alors calé sur la bulle d'air par le mouvement propre de la

châsse *lh*, c'est-à-dire, avec la vis *p'*, règle le déclina-toire vertical à zéro.

On enlèvera, ensuite, le bouton de la vis *p'*, afin d'éviter que la châsse *lh* se déränge pendant le transport de l'écli-mètre.

296. Lorsque l'éclimètre topographique n'aura qu'un sec-teur (*fig. 119*) : il faudra, pour en régler le déclina-toire vertical, connaître préalablement l'inclinaison zénithale § 284, conclue, au besoin, des distances horizontale et ver-ticale du lieu de station à un point de mire, § 285 page 164.

Mais, si rien n'a fourni cette inclinaison zénithale primi-tive, on recourra aux deux observations réciproques sui-vantes.

Le centre de l'éclin ètre étant en *Q* (*fig. 102*) : on don-nera, avec une cale quelconque du déclina-toire ver-tical, le coup d'alidade *g* sur l'objet *x*, tellement que  $g - x = zQN = \Delta$ . On ira, ensuite, stationner l'écli-mètre en *x* (*fig. 103*), et l'on donnera, avec la précé-dente déclinaison verticale *x*, le coup d'alidade *g''* sur le point *Q*, pour avoir  $g'' - x = z'NQ = \Delta'$ ; et comme  $zQN + z'NQ = 2^d = \Delta + \Delta'$ , il suit que  $2x = (g'' + g) - 2^d$ ,  $2\Delta = 2^d - (g'' - g)$ ,  $2\Delta' = 2^d + (g'' - g)$ .

A cause de la difficulté de stationner l'éclimètre aux som-mets *Q* et *x* qui servent de points de mire réciproques; on établira l'instrument près de ces sommets, sauf à soumet-tre chacune des inclinaisons zénithales  $\delta$ ,  $\delta'$  alors observées et résultant des graduations *g''* et *g*, à la correction repré-sentée : en *Q*, par  $\frac{i \sin \delta}{D \sin 1}$ ; en *x*, par  $\frac{i' \sin \delta'}{D \sin 1}$ , § 340; où l'on remplacera  $\delta$  par  $1^d - \left(\frac{g'' - g}{2}\right)$ , et  $\delta'$  par  $\frac{1^d + (g'' - g)}{2}$ .

A la rigueur, et quand l'incertitude de lecture sur l'écli-mètre sera moindre que l'influence de la courbure du Globe à la distance  $QH = D$ , on devra écrire  $\Delta + \Delta' = 2^d + \left(\frac{D}{20000}\right)$ ,

§ 332 p. 192; ce qui rendra  $2x = (g'' + g) - 2^d - \left(\frac{D}{2000''}\right)'$ ,  
 $2\Delta = 2^d + \left(\frac{D}{2000''}\right)' - (g'' - g)$ ,  $2\Delta' = 2^d + \left(\frac{D}{2000''}\right)' + (g'' - g)$ ,  
 pour régler l'éclimètre en Q par  $\Delta$ , ou en N par  $\Delta'$ .

297. Si le peu de longueur des directions, dont on cherche les inclinaisons zénithales, permet d'employer le déclinaire-à-perpendiculaire, § 265 page 153: l'éclimètre aura son limbe fixe ou mobile, selon que le perpendiculaire restera sur les mêmes repères  $e$ ,  $t$  de la plaque (*fig.* 112) ou qu'il devra couvrir successivement les rayons du limbe (*fig.* 108).

En remplaçant l'aiguille de la boussole à limbe mobile par un perpendiculaire  $e\pi$  (*fig.* 108): ce goniomètre sera transformé en éclimètre et passera, même, facilement d'une fonction à l'autre, si ledit perpendiculaire  $e\pi$  est une languette de cuivre ou d'argent (*fig.* 87, 108), qui puisse s'accrocher par son anneau  $c$  au pivot  $nc$ , entre le fond de la boîte et le levier  $zn$ , de manière à ne pas toucher l'aiguille aimantée.

Pour disposer en station ce nouvel éclimètre topographique: on commencera par presser l'aiguille contre le verre de la boîte, au moyen du levier  $zc$  (*fig.* 108), ce qui laissera, sur le pivot, de l'espace à l'anneau  $c$  du perpendiculaire; on fera, ensuite, basculer la boîte sur son genou jusqu'à ce que la pointe du perpendiculaire arrase librement le limbe qui deviendra, alors, suffisamment vertical. L'axe visuel  $av$  s'inclinera, d'ailleurs, dans ce plan vertical, en vertu de la rotation de la boîte sur l'essieu de son genou; et ce sera, par le mouvement de la douille  $x$  autour de son pied, qu'on établira la face du limbe à droite ou à gauche de l'observateur.

298. Afin d'exécuter la double-mesure réglementaire du § 286, avec l'éclimètre-à-perpendiculaire dont le limbe mobile est numéroté de gauche à droite (*fig.* 108): j'établis cet instrument face à droite par rapport à la direction  $n'v'$  du coup d'alidade sur un point éloigné  $s$ , qui place la graduation  $g$  sous le perpendiculaire servant d'index à l'éclimètre;



soit  $x$  la graduation que marquerait ce perpendicule pour la direction zénithale de l'axe visuel :  $(x - g)$  mesurera l'inclinaison zénithale  $\delta$  de  $\mathbf{r's}$ .

Je tourne, maintenant, le limbe face à gauche, afin que la verticale devienne le premier côté de l'angle zénithal; et je reporte, sur  $s$ , l'axe visuel  $\mathbf{rv}$  qui fera marquer la graduation  $g''$  au perpendicule  $c\pi$  : de manière à avoir  $g'' - x = \delta$ , dont la combinaison avec le précédent résultat  $x - g = \delta$  fournira  $2\delta = g'' - g$  et  $2x = g'' + g$ .

On aura donc : 1.<sup>o</sup> la valeur  $\delta = \frac{g'' - g}{2}$  indépendante de la position du tuyau visuel  $\mathbf{rv}$  sur la plaque de l'éclimètre, et 2.<sup>o</sup> la graduation  $x = \frac{g'' + g}{2}$  qui, placée sous le perpendicule  $c\pi$ , rendra l'axe visuel vertical. De sorte que l'éclimètre à limbe mobile, dont la face, numérotée de gauche à droite, aura été tournée à gauche, § 281, mesurera immédiatement une inclinaison zénithale, par un seul coup d'alidade  $\mathbf{a''}$  sur la direction proposée : en retranchant, de cette graduation  $\mathbf{a''}$ , celle qui vient d'être assignée au coup d'alidade vertical.

On réglera, aussi, cet éclimètre à une graduation désignée  $b$ , et particulièrement à *zéro* : en fixant le limbe sur sa boîte, de manière à placer la graduation  $\left(\frac{g'' - g}{2}\right) + b$ , ou seulement  $\left(\frac{g'' - g}{2}\right)$ , sous le perpendicule  $c\pi$ , pendant que, ce limbe étant tourné à gauche, l'axe visuel  $\mathbf{rv}$  restera sur la direction  $\mathbf{rs}$  qui a précédemment fourni les deux graduations successives  $g$  et  $g''$ .

299. Enfin, le rapporteur circulaire deviendra éclimètre-à-perpendicule, improvisé pour des observations peu importantes.

Son règlement, par une double-mesure, ne différera de celui du précédent éclimètre : qu'en ce que, la base visuelle  $\mathbf{ab}$  se retournant bout-pour-bout dans les deux positions symétriques  $\mathbf{axb}$ ,  $\mathbf{b'xa'}$  de la figure 103, une graduation  $g$

sera lue sur un des demi-limbes principaux  $L$  (*fig.* 53, 54), tandis qu'on lira l'autre graduation  $g''$  sur le demi-limbe supplémentaire  $L'$ .

Ainsi, le rapporteur étant numéroté de gauche à droite, je prends la direction visuelle  $NQ$  pour appui de  $ba$  (*fig.* 103), en tournant la face du rapporteur à ma droite : le perpendicule  $c\pi$  marquera la graduation  $g$  sur un des limbes, et j'écrirai  $y - g = \delta$ . Je présente, maintenant, la face du rapporteur à ma gauche en  $a'xb'$  : et la graduation  $g''$ , lue sur l'autre demi-limbe, donnera  $g'' - y = \delta$  ; d'où  $2y = g'' + g$  et  $2\delta = g'' - g$ , qui fournissent les conclusions déjà répétées.

Le rapporteur servira d'éclimètre matériel, encore plus commodément que l'éclimètre visuel : par la juxtaposition de sa base contre un appui résistant. C'est ainsi que l'éclimètre des ouvriers se forme du niveau à perpendicule portant un limbe, dont le rayon-origine, gradué  $1^d$ , coïncide avec le repère de ce niveau.

300. Il est, même, des éclimètres matériels qui procurent immédiatement la cotangente d'une inclinaison à la verticale, ou le rapport de la projection verticale  $NH$  d'une longueur  $NQ$  (*fig.* 102, 103) à sa projection horizontale  $QH$  ; lequel rapport est, aussi, celui de la hauteur à la base d'une inclinaison à l'horizon  $NQH$ .

Et l'on donne cette dernière faculté au niveau-à-perpendicule : en portant, sur une parallèle  $x'x''$  à sa base  $b'a'$  (*fig.* 103), des parties égales et aliquotes de l'apothème  $ct$ , avec les numéros 1, 2, 3. .. à partir de  $t$ . En supposant, alors, que chaque partie  $p$  ait la longueur  $\frac{ct}{n}$ , et que le perpendicule  $c\pi$  batte le numéro  $g$  quand la base  $b'a'$  sera appliquée contre la règle  $QN$  : cot.  $cx'x''$  égalera  $\frac{x't}{ct}$  ou  $\frac{g.p}{n.p} = \frac{g}{n}$ .

L'éclimètre indiquera les pentes en centièmes, par l'hypoténuse  $n = 100$  ; tellement que, si l'apothème  $ct$  a 5 décimètres, la partie  $p = \frac{ct}{n}$  comprendra 5 millimètres. Et, pour

donner la pente  $\frac{3}{100}$  à une règle, on calera celle-ci de manière à faire battre la graduation n.° 3 au perpendicule de l'éclimètre qui vient d'être construit.

Les niveaux-à-perpendicule des figures 106 et 107 ont reçu les graduations qui les rendent éclimètres. L'observateur en présentera le limbe à sa droite ou à sa gauche, selon que les pentes lui paraîtront ascendantes ou descendantes.

301. Si l'on remarque que la graduation-origine de l'éclimètre-à-perpendicule appartient au rayon du limbe parallèle à l'axe visuel; on conclura le moyen de reconnaître le rayon parallèle à l'axe visuel qui fait corps avec le limbe d'un goniomètre, quand celui-ci pourra recevoir un fil-à-plomb par son centre.

Cette expérience, pratiquée sur la boussole à limbe mobile, conduira à repérer le méridien magnétique, § 199 page 117.

#### *L'Éclimètre à réflexion.*

302. Les goniomètres à réflexion, étant spécialement destinés aux observations vacillantes et à la main, ne pourront pas recevoir un déclinatoire vertical; ils ne serviront donc à la mesure des inclinaisons zénithales, qu'au moyen d'un horizon sensible ou artificiel, § 289 page 165.

En mer, où l'horizon sensible est très étendu, on mesure l'angle d'élévation d'un astre sur l'horizon, en faisant affleurer, dans le tuyau visuel, l'horizon sensible par l'image de l'astre, réfléchi simplement, § 211 page 122, ou doublement, § 215 page 124. Le sextant et, même, l'octant suffisent à ce genre d'observations.

#### *L'ÉCLIMÈTRE RÉPÉTITEUR.*

303. L'éclimètre devenu répétiteur, comme le goniomètre § 242 page 138, par l'indépendance des mouvements du limbe, du déclinatoire vertical et du tuyau visuel, sup-

pléera efficacement : 1.<sup>o</sup> à l'inexacte division du limbe, particulièrement due à la petitesse de son rayon ; 2.<sup>o</sup> à l'imparfaite déclinaison verticale, obtenue dans les courtes limites de son apothème ; 3.<sup>o</sup> à l'incertitude du pointé, provenant surtout de la longueur des directions observées.

Le tube-à-bulle d'air étant le seul déclinateur vertical qui puisse être calé avec commodité et précision ; l'éclimètre-à-bulle d'air sera, par conséquent, le seul dont la multiple manœuvre aura de l'utilité : aussi n'adopté-t-on comme RÉPÉTITEUR que l'éclimètre astronomique décrit au § 291 page 167.

304. Nous avons vu, § 286 page 164, que les coups d'alidade  $g$  et  $g_2$  donnés sur la direction  $cq$ , avec la même déclinaison verticale  $x$  dans les positions successives de l'éclimètre, face à droite et face à gauche de l'observateur (fig. 111, 112), le limbe étant numéroté de droite à gauche, ont produit :

$$\left. \begin{array}{l} x - g = \delta \\ g_2 - x = \delta \end{array} \right\} \text{ et } g_2 - g = 2\delta.$$

Si on recommence cette double-observation en partant de la position actuelle  $g_2$  de l'index, c'est-à-dire, en tournant le limbe face à droite et dirigeant l'axe visuel selon  $cq$ , par la rotation de la plaque sur son essieu, pour caler ensuite le déclinateur vertical par son mouvement propre : une nouvelle déclinaison verticale  $x'$  deviendra commune au coup d'alidade actuel  $g_2$ , et à celui  $g_4$  qu'on donnera sur  $cq$  après avoir présenté le limbe face à gauche. Tellement qu'on aura :

$$\left. \begin{array}{l} x' - g_2 = \delta \\ g_4 - x' = \delta \end{array} \right\} \text{ et } g_4 - g_2 = 2\delta.$$

Cette graduation  $g_4$  servant, à son tour, d'origine à une nouvelle double-mesure qui s'appuiera sur la déclinaison verticale  $x''$  ; on obtiendra encore :

$$\left. \begin{array}{l} x'' - g_4 = \delta \\ g_6 - x'' = \delta \end{array} \right\} \text{ et } g_6 - g_4 = 2\delta$$

et ainsi de suite. De sorte que, en ajoutant chaque va-

leur  $2\delta$  avec celles qui la précèdent, il viendra :

$$g_2 - g = 2\delta, \quad g_4 - g = 4\delta, \quad g_6 - g = 6\delta, \text{ etc...}$$

Chacun de ces résultats ayant, d'ailleurs, l'incertitude  $\frac{p}{n}$  propre à la lecture des deux graduations qui le composent, § 110 page 63, la mesure de l'inclinaison zénithale  $\delta$  sera d'autant mieux affranchie de cette erreur, que l'observation aura été plus répétée.

305. En imposant une graduation désignée, au coup d'alide qui commence la première des observations précédentes, comme on l'a fait dans les répétitions suivantes : le choix du *zéro*, pour cette graduation-origine, rendra le second coup d'alidade de chaque double-mesure un multiple-pair de l'inclinaison zénithale observée, à l'incertitude de lecture près  $\frac{p}{n}$ , c'est-à-dire :

$$2\delta = g_2 \pm \frac{p}{n}, \quad 4\delta = g_4 \pm \frac{p}{n}, \quad 6\delta = g_6 \pm \frac{p}{n}, \text{ etc....}$$

Pour manœuvrer l'éclimètre répéteur dont le limbe est numéroté de droite à gauche : après avoir réglé le niveau de son essieu, § 291, 293 pages 167, 168, et disposé l'axe visuel parallèlement au limbe, § 283 page 163 ; après avoir mis l'instrument en place, § 292 page 167, et fixé son index à *zéro* ; il faudra :

- 1.° Caler verticalement le limbe, face à droite, et conduire l'axe visuel sur le point de mire, par la rotation de la plaque ;
- 2.° Caler, par son mouvement propre, le déclinaire vertical à un repère quelconque ;
- 3.° Tourner face à gauche le limbe, conservé vertical par l'horizontalité de son essieu, et caler le déclinaire vertical au repère précédent, par la rotation de la plaque ;
- 4.° Diriger, par son mouvement propre, l'axe visuel sur le point de mire.

En suite de quoi, l'index marquera la double-graduation de l'inclinaison zénithale proposée, qu'on se dispensera même de lire, si l'on veut continuer l'observation des multiples-pairs plus élevés.

La coopération simultanée de deux observateurs accélérera beaucoup cette manœuvre, tout en favorisant la précision.

306. L'usage de l'éclimètre répétiteur étant d'autant plus prompt qu'on aura mis de soin à l'établir en station ; il sera utile de disposer verticalement sa colonne, § 292 page 167, pour que le limbe reste vertical pendant ses retournements successifs. Et ces précautions deviendront *indispensables* : lorsque, dans la géodésie primordiale, on observera les corps célestes ; car, alors, la graduation-multiple de chaque inclinaison zénithale devra s'obtenir en assez peu de temps pour considérer le mouvement de l'astre comme rectiligne, afin que la place moyenne de cet astre corresponde à l'heure moyenne de l'observation.

307. On se convaincra facilement que la double-observation de l'inclinaison zénithale  $zcQ$  accomplit les deux mesures successives de cette inclinaison, avec l'éclimètre dont le limbe sera alternativement fixe et mobile.

En effet, l'éclimètre numéroté de droite à gauche (*fig. 111*) étant d'abord à limbe mobile : j'en mets la face à droite, § 281 p. 162, et je dirige selon  $cQ$ , par la rotation du limbe, l'axe visuel  $rv$  appuyé à la graduation quelconque  $g$  ; puis, je cale le déclinateur vertical  $yr\pi$  ou  $et\pi$  au repère  $r$  ou  $t$ , par son mouvement propre. Soit  $x$  la graduation du coup d'alidade vertical, il viendra  $x - g = zcQ = \delta$ .

J'arrête, maintenant, le déclinateur  $yr\pi$  ou  $et\pi$  contre la plaque de l'éclimètre, pour en rendre le limbe fixe ; et, tournant alors ce limbe face à gauche (*fig. 112*), je le décline au repère  $r$  ou  $t$ , par la rotation générale de l'instrument, pour amener ensuite, par son mouvement propre, l'axe visuel  $rv$  sur  $cQ$  et obtenir la graduation  $g''$  de l'index. La graduation du coup d'alidade vertical  $x$  n'étant, d'ailleurs, pas changée : on aura  $g'' - x = \delta$  dont la combinaison avec le précédent résultat  $x - g = \delta$  produit  $g'' - g = 2\delta$ .

308. TABLE des corrections pour réduire à l'horizon une distance  $D$ , située sur un plan incliné :

- 1.<sup>o</sup> Lorsque  $D$  a été *mesurée*. . . . . correction  $= D \sin^2 \frac{i}{2}$ , § 155 page 91.  
 2.<sup>o</sup> Quand  $D$  a été estimée avec la *Stadia* accessible. . . . . correction  $= D \sin^2 i$ , § 156 page 92.

| Inclin.        | 100 <sup>m</sup> | 200 <sup>m</sup> | 300 <sup>m</sup> | 400 <sup>m</sup> | 500 <sup>m</sup> | 600 <sup>m</sup> | 700 <sup>m</sup> | 800 <sup>m</sup> | 900 <sup>m</sup> | Inclin. |
|----------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|---------|
| 1 <sup>o</sup> | Mesure           | Stadia           | Mesure           | Stadia           | Mesure           | Stadia           | Mesure           | Stadia           | Mesure           | Stadia  |
| 2              | 0.01             | 0.03             | 0.03             | 0.05             | 0.06             | 0.13             | 0.08             | 0.16             | 0.10             | 0.20    |
| 3              | 0.05             | 0.1              | 0.2              | 0.3              | 0.4              | 0.5              | 0.3              | 0.6              | 0.4              | 0.8     |
| 4              | 0.10             | 0.2              | 0.4              | 0.7              | 0.9              | 1.2              | 0.7              | 1.4              | 0.8              | 1.6     |
| 5              | 0.20             | 0.4              | 0.8              | 1.2              | 1.6              | 2.0              | 1.4              | 2.8              | 1.8              | 3.6     |
| 6              | 0.31             | 0.6              | 1.2              | 1.8              | 2.5              | 3.1              | 2.2              | 4.3              | 2.8              | 5.6     |
| 7              | 0.44             | 0.9              | 1.8              | 2.7              | 3.6              | 4.4              | 3.1              | 6.3              | 4.0              | 8.0     |
| 8              | 0.60             | 1.2              | 2.4              | 3.6              | 4.8              | 6.0              | 4.2              | 8.4              | 5.4              | 10.9    |
| 9              | 0.79             | 1.6              | 3.2              | 4.7              | 6.3              | 7.9              | 5.5              | 11.0             | 7.1              | 14.2    |
| 10             | 1.00             | 2.0              | 4.0              | 6.0              | 7.9              | 9.9              | 7.0              | 13.9             | 9.0              | 17.9    |
| 11             | 1.25             | 2.5              | 5.0              | 7.5              | 9.8              | 12.3             | 8.5              | 17.1             | 10.8             | 22.1    |
| 12             | 1.49             | 3.0              | 6.0              | 9.0              | 11.8             | 14.8             | 10.4             | 20.7             | 12.9             | 26.6    |
| 13             | 1.77             | 3.5              | 7.0              | 10.5             | 13.0             | 17.6             | 12.0             | 24.5             | 14.1             | 31.6    |
| 14             | 2.08             | 4.1              | 8.2              | 12.3             | 15.5             | 20.6             | 14.5             | 28.7             | 16.6             | 37.0    |
| 15             | 2.41             | 4.8              | 9.5              | 14.3             | 18.0             | 23.8             | 16.9             | 33.4             | 19.3             | 43.0    |
| 16             | 2.75             | 5.5              | 10.9             | 16.3             | 21.0             | 27.3             | 19.3             | 38.1             | 21.7             | 49.1    |
| 17             | 3.14             | 6.2              | 12.4             | 18.6             | 24.7             | 30.9             | 22.1             | 43.4             | 25.3             | 55.7    |
| 18             | 3.54             | 7.0              | 14.0             | 20.9             | 27.9             | 34.8             | 24.9             | 48.8             | 28.4             | 62.8    |
| 19             | 3.97             | 7.9              | 15.6             | 23.4             | 31.1             | 38.9             | 27.9             | 54.5             | 31.9             | 70.1    |
| 20             | 4.42             | 8.7              | 17.3             | 25.4             | 34.6             | 43.5             | 30.8             | 60.0             | 35.2             | 77.8    |
|                | 4.89             | 9.6              | 19.1             | 28.7             | 38.2             | 48.4             | 34.2             | 66.9             | 39.1             | 86.0    |

309. TABLE des nombres  $\bar{5}lg\delta$ : donnant les valeurs  $\frac{1m}{2000}lg\delta$  en déci-millimètres, pour déterminer les différences de niveau et les cotes principales.

|                  |                  |                  |                  |                  |                  |                  |                  |                  |                  |                  |                  |
|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| 50 <sup>e</sup>  | 60 <sup>e</sup>  | 70 <sup>e</sup>  | 80 <sup>e</sup>  | 85 <sup>e</sup>  | 86 <sup>e</sup>  | 87 <sup>e</sup>  | 88 <sup>e</sup>  | 89 <sup>e</sup>  | 90 <sup>e</sup>  | 91 <sup>e</sup>  | 92 <sup>e</sup>  |
| —                | —                | —                | —                | —                | —                | —                | —                | —                | —                | —                | —                |
| 5                | 7                | 10               | 15               | 21               | 22               | 24               | 26               | 29               | 32               | 36               | 40               |
| 150 <sup>e</sup> | 140 <sup>e</sup> | 130 <sup>e</sup> | 120 <sup>e</sup> | 115 <sup>e</sup> | 114 <sup>e</sup> | 113 <sup>e</sup> | 112 <sup>e</sup> | 111 <sup>e</sup> | 110 <sup>e</sup> | 109 <sup>e</sup> | 108 <sup>e</sup> |

+

Les nombres  $\bar{5}lg\delta$ , correspondant aux angles qui seront inférieurs à 50<sup>e</sup> et supérieurs à 150<sup>e</sup>, se trouveront par :

$$\begin{aligned}\bar{5}lg(A < 50^e) &= \frac{\bar{5}lg(100^e - A)}{25} \\ \bar{5}lg(B < 150^e) &= \frac{\bar{5}lg(B - 100^e)}{25}\end{aligned}$$

| 1   | 93 <sup>e</sup>  | 94 <sup>e</sup>  | 95 <sup>e</sup>  | 96 <sup>e</sup>  | 97 <sup>e</sup>  | 98 <sup>e</sup>  | 99 <sup>e</sup>  | +  |
|-----|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|----|
| 5   | 46               | 54               | 65               | 81               | 108              | 165              | 356              | 95 |
| 10  | 46               | 54               | 65               | 82               | 110              | 167              | 354              | 90 |
| 15  | 46               | 55               | 66               | 85               | 112              | 172              | 374              | 85 |
| 20  | 47               | 55               | 66               | 84               | 114              | 177              | 400              | 80 |
| 25  | 47               | 56               | 67               | 85               | 116              | 182              | 424              | 75 |
| 30  | 47               | 56               | 68               | 86               | 118              | 187              | 454              | 70 |
| 35  | 48               | 57               | 69               | 87               | 120              | 195              | 488              | 65 |
| 40  | 48               | 57               | 69               | 88               | 122              | 199              | 522              | 60 |
| 45  | 49               | 58               | 70               | 89               | 124              | 206              | 562              | 55 |
| 50  | 49               | 58               | 70               | 91               | 127              | 212              | 636              | 50 |
| 55  | 49               | 59               | 71               | 92               | 130              | 220              | 702              | 45 |
| 60  | 50               | 59               | 72               | 94               | 135              | 227              | 762              | 40 |
| 65  | 50               | 60               | 73               | 95               | 136              | 236              | 912              | 35 |
| 70  | 50               | 60               | 74               | 96               | 138              | 245              | 1064             | 30 |
| 75  | 51               | 61               | 75               | 97               | 141              | 255              | 1275             | 25 |
| 80  | 51               | 61               | 76               | 99               | 145              | 265              | 1612             | 20 |
| 85  | 52               | 62               | 77               | 101              | 148              | 277              | 2170             | 15 |
| 90  | 52               | 62               | 78               | 103              | 151              | 289              | 3552             | 10 |
| 95  | 53               | 65               | 79               | 104              | 155              | 305              | 6250             | 5  |
| 100 | 53               | 64               | 80               | 106              | 159              | 318              | —                | 0  |
| —   | 100 <sup>e</sup> | 105 <sup>e</sup> | 104 <sup>e</sup> | 103 <sup>e</sup> | 102 <sup>e</sup> | 101 <sup>e</sup> | 100 <sup>e</sup> | 1  |



## LIVRE III.<sup>e</sup> : TOPOGRAPHIE RÉGULIÈRE.

---

### *Notions préliminaires.*

310. LA TOPOGRAPHIE est l'art de décrire une partie de la surface terrestre, de manière à juger de la configuration et des ressources que présente son étendue.

Cette description, devenue indispensable dans toutes les relations sociales, consistait primitivement à mentionner, *par écrit*, les formes et les productions du terrain; et ces notes, multipliées selon que la description devait être plus complète, étaient toujours d'un emploi difficile.

Le dessin d'imitation a permis, ensuite, de réunir quelques-uns de ces documents, par le tracé des figures apparentes, ou *Portraits*, de plusieurs parties de l'étendue à décrire.

Enfin, la représentation géométrique du *Relief* du terrain, en coordonnant entre eux tous les éléments de son volume, a offert, à l'aide de quelques signes conventionnels, l'ensemble d'un plus grand nombre d'indications: en diminuant d'autant les renseignements écrits.

La topographie, en général, comprend donc deux sortes de description, qui se prêtent un mutuel secours: l'une graphique, ou Topographie *proprement dite*, et l'autre écrite, consistant en *Mémoires descriptifs*.

311. La topographie proprement dite a pour but de traduire, avec clarté, les observations relatives à la configuration du terrain. Et, comme ces observations peuvent s'exécuter et se décrire par des moyens géométriques, il s'ensuit que: en employant, pour caractères fondamentaux de l'écriture topographique, ceux en usage dans les considérations géométriques, on rendra la topographie graphique une application immédiate des principes contenus dans le Livre I.<sup>er</sup> de ce Traité.

312. L'épure figurative d'un terrain porte le nom de **CARTE** topographique.

L'échelle d'une carte, comme celle des épures de corps quelconques, montre l'exactitude avec laquelle on reproduira les dimensions terrestres, ou *géodésiques*, au moyen des dimensions graphiques; elle indique, aussi, le soin à apporter dans les mesures géodésiques, pour que la description graphique du terrain soit régulière, § 7 page 2.

On décidera aussi, d'après le § 8, qu'une carte devra être régulière: quand on la destinera à préparer ou à modifier des constructions sur le terrain; tandis que, selon le § 9, le tracé irrégulier d'une carte suffira à un projet provisoire, ou à la simple reconnaissance de la figure du terrain.

La pratique des descriptions régulières, facilitant l'estimation des distances et des angles, conduira aux moyens prompts d'exécuter la topographie irrégulière.

313. Comme la courbure de l'enveloppe terrestre exige, pour pouvoir assembler des documents figuratifs d'une étendue considérable de terrain, que les descriptions partielles soient rapportées à des plans tangents à ladite enveloppe, § 50 page 24; on a choisi ces derniers, qui sont *horizontaux*, pour plans de repère des projections topographiques.

314. Et, afin de limiter l'espace terrestre qui peut être rapporté à un seul élément-plan du Globe: on remarquera que l'arc d'un grade diffère de sa corde, d'une quantité moindre que la demi-millionième partie du rayon, § 54 page 26; or, le rayon du Globe étant d'environ 6377 kilomètres, le grade d'un grand cercle terrestre, qui est de 100 kilomètres, aura seulement 3<sup>m</sup>,2 de plus que sa corde. Donc, la projection orthogonale d'un terrain sur une calotte du Globe, dont la base n'aura pas plus de 100 kilomètres de diamètre, sera sensiblement la même que la projection du dit terrain sur la base de la calotte, ou sur le plan tangent-milieu de cette calotte.

Toutefois, les longueurs des coordonnées qui projettent des points sur ce plan tangent, pourront différer des coor-

données qui projettent les mêmes points sur la calotte sphérique, d'une manière assez appréciable pour devoir en tenir compte; comme nous le montrerons aux § 332, 333, 334.

315. Le tracé de la projection horizontale, ou du Plan, d'un espace terrestre constitue la **PLANIMÉTRIE**; et l'on appelle **NIVELLEMENT** la recherche des cotes verticales qui doivent compléter la description du terrain.

---

## CHAPITRE I.<sup>er</sup> : CANEVAS GÉNÉRAL D'UNE CARTE.

### *Canevas de la Planimétrie.*

316. En supposant que toutes les parties d'un terrain se rapportent au même horizon: le Plan dudit terrain sera une figure semblable à sa projection horizontale; et, pour le construire, il faudra évaluer des angles et des côtés de cette projection.

Or, les angles d'un polygone terrestre, étant compris par des rayons visuels; pourront souvent être observés; tandis que les côtés de ce polygone ne seront mesurables, que dans les circonstances rares où leur étendue sera d'un facile accès. De sorte qu'on devra éviter la mesure de *grandes* longueurs, dans la construction régulière d'un Plan, en se proposant de rattacher, *par des mesures d'angles*, les projections des points remarquables du terrain à une seule base: soit directement par le procédé du § 69 page 34; soit au moyen de côtés auxiliaires coordonnés entre eux et avec cette base, comme il a été indiqué au § 70 page 35; tellement que chacun des côtés de ce CANEVAS puisse servir d'appui à un groupe de points de détails, pour coordonner ensuite tous ces groupes entre eux.

317. Les triangles, qui composent le canevas fondamental d'une carte, étant assujettis aux conditions de grandeur et de

forme imposées par les § 82 et 83, pages 42 et 43; on en choisira les sommets parmi les objets remarquables dont l'enchaînement aura été assuré, au moyen d'une reconnaissance préliminaire à laquelle on procédera comme il suit.

Parvenu sur le terrain à lever; on se portera en un point culminant *x* de facile accès (*fig.* 120), et l'on y observera le *tour-d'horizon* visuel: par le relèvement approximatif des directions sur les objets environnants (*fig.* 121), qu'on découvrira et dont on fera le signalement à l'aide d'une lunette.

On ira, ensuite, à l'un de ces objets *v* dont on relèvera aussi le tour d'horizon visuel: en ayant soin d'y comprendre la première station et le plus possible de points antérieurement observés (*fig.* 122).

Puis, on se transportera à un troisième lieu *n* précédemment visé: pour en dresser le tour d'horizon s'appuyant sur deux objets déjà *deux fois* observés, et contenant, parmi ses rayons, ceux qui tendent à des points précédemment remarqués (*fig.* 123).

On continuera ces stations, sans craindre de les prodiguer, jusqu'à ce que d'autres tours-d'horizon en *p*, *g*, *s* et *n* (*fig.* 124, 125, 126, 127) aient atteint des objets saillants de l'espace à lever, y compris ceux qui signaleront les extrémités de la lase principale *vp*, dont on aura pu, chemin faisant, reconnaître l'emplacement propice à sa mesure.

On emploiera, à ces observations, le goniomètre le plus portable, et préférablement une petite boussole. § 195 page 115; si, même, on ne se contente de l'espèce de planchette formée du calepin avec une règle, § 237 page 134. Et l'on rendra la reconnaissance plus courte et plus profitable: en se faisant accompagner, à chaque station, par un indicateur bien renseigné sur les noms des localités environnantes.

318. Revenu au cabinet: on décalquera, sur une même feuille, ces tours-d'horizon qu'on appuiera successivement l'un à l'autre (*fig.* 120); et les rencontres des rayons de même nom, en disposant les points correspondants, d'une

manière à-peu-près semblable à l'espace qu'ils limitent sur le terrain, donneront les triangles qui rattachent lesdits points entre eux, ainsi que les rapports des distances de ces points deux-à-deux. En sorte qu'il suffira de construire une échelle d'hectomètres, d'après la distance approximativement évaluée entre deux lieux quelconques du canevas, § 151 page 86, pour conclure les longueurs provisoires des côtés tracés, et conserver, au canevas définitif, les triangles dont la forme et l'étendue satisferont le mieux aux moyens d'observation et à l'exactitude destinée aux derniers résultats, § 82, 83 pages 42, 43.

On composera, alors, facilement chaque station utile : en indiquant les angles à observer dans cette station, et la précision que leurs mesures devront atteindre.

319. Ces dispositions préparatoires étant arrêtées; pour accomplir une station angulaire : on mettra d'abord le goniomètre en une place *s*, très rapprochée de la verticale *c* qui projette le repère de cette station (*fig. 17*), et gênant le moins possible les directions de l'alidade sur les points du tour d'horizon définitif; sauf à changer cette place autant de fois que l'exigera la correspondance visuelle. Puis, on mesurera :

1.<sup>o</sup> Chaque angle *ns<sub>g</sub>*, par la multiple amplitude qui lui est imposée, § 83 page 43, en raison de la longueur de ses côtés *sn*, *sg*, et de la perfection du goniomètre; avec la manœuvre du § 247 page 141.

2.<sup>o</sup> Les inclinaisons zénithales  $\Delta$ ,  $\delta$  des côtés visés, par leurs amplitudes convenablement répétées; avec la manœuvre du § 305 page 177.

3.<sup>o</sup> L'inclinaison approximative *gsc*, ou *nsc*, de *sc* sur l'un des côtés *sg*, *sn*.

4.<sup>o</sup> L'excentricité horizontale, ou la distance *sc* entre le centre *s* du goniomètre et la verticale *c* du repère.

5.<sup>o</sup> L'excentricité verticale, ou la distance du centre de l'instrument à l'horizon du repère de la station, pour servir au § 340 page 197.

Et, après en avoir semblablement agi à tous les lieux de station : on aura ce qui convient au calcul des rapports des côtés du canevas à la base choisie, dont la mesure, exécutée par les moyens prescrits aux § 131 ou 132, page 75, complètera les observations dudit canevas.

320. En effet, les angles, mesurés à une station, deviendront ceux du canevas qui ont le repère de cette station pour sommet, en leur faisant subir les réductions à l'horizon et au centre. Or 1.<sup>o</sup> la formule du § 64 page 31 :

$$\frac{A-a}{1'} = \left(10000 - \frac{b+c}{2}\right)^2 \operatorname{tg} \frac{a}{2} \sin 1' - \left(\frac{b-c}{2}\right)^2 \cot \frac{a}{2} \sin 1'$$
 conviendra à la réduction de l'angle  $\text{DSG}$ , à l'horizon (*fig. 17*), en y remplaçant  $a$  par  $\text{DSG}$  ou  $s$ ,  $b$  et  $c$  par les nombres de centigrades respectivement contenus dans les inclinaisons zénithales  $\Delta$  et  $\delta$  ; pour écrire :

$$\frac{A-s}{1'} = \left(10000 - \frac{\Delta+\delta}{2}\right)^2 \operatorname{tg} \frac{s}{2} \sin 1' - \left(\frac{\Delta-\delta}{2}\right)^2 \cot \frac{s}{2} \sin 1'.$$

2.<sup>o</sup> La réduction au centre sera l'application de la formule 
$$\frac{c-A}{1'} = \frac{r \sin(A+y)}{d \sin 1'} - \frac{r \sin y}{g \sin 1'}$$
 du § 58 page 28 (*fig. 17*), dans laquelle  $r = \text{CS}$ ,  $y = \text{GSC}$ ,  $d$  et  $g$  se remplacent par les côtés  $\text{SN}$ ,  $\text{SG}$  résultant du canevas provisoire, § 318, et  $\sin(A+y)$  par  $\sin(s+y)$ .

En sorte que la correction totale ( $c-s$ ) devant être ajoutée à l'angle observé  $\text{DSG}$ , ou  $s$ , pour le rendre angle  $c$  du canevas, sera :

$$\frac{c-s}{1'} = \left\{ \left(10000 - \frac{\Delta+\delta}{2}\right)^2 \operatorname{tg} \frac{s}{2} \sin 1' - \left(\frac{\Delta-\delta}{2}\right)^2 \cot \frac{s}{2} \sin 1' \right\} + \left\{ \frac{r \sin(s+y)}{d \sin 1'} - \frac{r \sin y}{g \sin 1'} \right\}$$

321. Cela posé, on formera un tableau de quatre colonnes, dont la première contiendra les noms et désignations des sommets de triangles, par ordre d'enchaînement en partant de la base d'appui. Dans la seconde colonne, on placera, vis-à-vis de chaque sommet, l'angle correspondant, que l'on conclura, au besoin, de la somme des deux autres

angles du même triangle. On effectuera alors, dans la troisième colonne, le calcul logarithmique du côté opposé en fonction de la base, d'après les proportions établies entre les côtés d'un triangle et les sinus de ses angles. Et, dès que l'on connaîtra la longueur de la base, on écrira, dans la quatrième colonne, les valeurs numériques des côtés, en regard des angles opposés.

322. L'angle conclu d'un triangle renfermant la somme algébrique des erreurs d'observation des deux autres angles; il faudra obtenir ces derniers avec une chance d'erreur moitié moindre que celle, d'abord, regardée comme négligeable.

Les points *conclus* d'un canevas sont ceux où l'on n'a pas stationné. Il convient de comprendre ces points dans deux triangles au moins, pour éviter ou constater les erreurs de pointé, occasionnées par un signalement imparfait de ces sommets, et que l'on peut quelquefois reconnaître par une combinaison des angles observés, avant même de les avoir réduits au centre et à l'horizon, § 81 page 41.

Lorsque les trois angles d'un triangle auront été mesurés : l'erreur d'observation, fournie par la différence de deux droits à la somme de ces angles réduits au centre et à l'horizon, se répartira, par tiers, sur chacun desdits angles, pour les faire appartenir au même triangle.

323. Si, enfin, le canevas avait un enchaînement considérable, et qu'on n'eût pu choisir pour base un côté central de cet enchaînement; il serait utile de mesurer deux bases aux extrémités les plus éloignées du canevas : pour que l'une de ces bases, vérifiant les calculs qui s'appuient sur l'autre, ajoute à la confiance des opérations.

324. On pourrait, avec la longueur des côtés calculés, construire, par triangles, les positions des sommets du canevas sur une ou plusieurs feuilles; mais, cette opération graphique occasionnant souvent de graves erreurs : il sera préférable de distribuer immédiatement les sommets sur leurs feuilles, au moyen des coordonnées rectangulaires de ces

points de repère, lesquelles se concluent des résultats trigonométriques du canevas général, § 85 page 44.

Ainsi, en traçant, sur le canevas provisoire du § 318 (*fig. 120*), les axes  $ox$ ,  $oy$ : d'après l'azimuth, arbitraire ou désigné, d'un côté  $se$ , et au moyen d'un point  $E$ , auquel on donne ordinairement des coordonnées  $x'$ ,  $y'$ , telles que la plupart des sommets soient compris dans un seul angle des axes, *et, quelquefois aussi, pour que la carte contienne le moins de feuilles possible*; on conclura, d'abord, les azimuths de tous les côtés du canevas, et, successivement, les coordonnées de chacun de ses points que l'on réunira en tableau.

En sorte qu'il suffira de diviser, par des parallèles aux axes, le canevas provisoire (*fig. 120*) en feuilles rectangulaires de dimensions voulues, et de numérotter ces feuilles: pour écrire dans le tableau précédent, vis-à-vis de chaque sommet, le numéro de la feuille qui contiendra ce point, en raison de ses coordonnées. Ce qui conduira au relevé des sommets appartenant à chaque feuille, dont la préparation planimétrique, exigeant deux sommets, ou bien un point extérieur à une direction repérée, § 80 page 41, imposera, à la reconnaissance préliminaire des § 317, 318, pages 183, 184, la condition de fournir, à chacune de ses feuilles, des points qui, naturellement ou artificiellement signalés, repèrent une base, et même plusieurs bases quand le terrain correspondant à cette feuille aura paru assez chargé pour réclamer cet avantage.

325. Si la carte devait être exécutée par zones particulières: on conduirait la reconnaissance sur la région correspondante du terrain, § 317, et l'on marquerait les contours de ces zones sur le canevas provisoire § 318, pour choisir les triangles qui, couvrant lesdites zones, fourniraient les sommets utiles à la partie devant être décrite sur chaque feuille.



*Canevas du Nivellement.*

326. Le plan horizontal, auquel on rapportera les points du terrain, sera désigné par le choix de sa distance à l'un desdits points; et l'on connaîtra, ensuite, la distance de tout autre point au plan de repère : au moyen de la différence de cette distance à celle primitivement adoptée.

Plusieurs points sont *de niveau* : quand ils sont situés du même côté et à égale distance du plan du repère. La *différence de niveau* de deux points est la distance entre les horizons de ces points, c'est-à-dire, la différence des verticales qui les séparent du plan de repère ; et la *cote de niveau* d'un point est le nombre des unités de hauteur contenues dans sa distance audit repère.

327. La détermination des cotes de niveau des points d'un terrain, ou le nivellement de ce terrain, revient à trouver les différences de niveau de tous ces points deux-à-deux ; et la différence de niveau de deux points  $c$  et  $v$  (fig. 128), c'est-à-dire, la différence des verticales  $cr$ ,  $vu$  s'obtiendra : 1.<sup>o</sup> au moyen de leur distance  $cn$  et de l'inclinaison zénithale  $zcv$  de  $cv$ , pour avoir  $(vu - cr) = \frac{cn}{\lg zcv}$  ; ou 2.<sup>o</sup> en comparant immédiatement les longueurs de ces verticales.

Le premier procédé, permettant que l'une des verticales soit inaccessible, conviendra aux nivellements étendus ; tandis que le second moyen, exigeant l'apposition d'une verticale sur l'autre, ne pourra servir qu'aux nivellements-de-détail très circonscrits.

328. La différence de niveau  $(vu - cr)$  (fig. 128), entre le centre  $c$  d'un éclimètre et le point de mire inaccessible  $v$ , étant égale à  $\frac{cn}{\lg zcv}$ , aura le signe positif ou négatif : selon que l'inclinaison zénithale  $zcv$  sera plus petite ou plus grande que l'angle droit, c'est-à-dire que le point de mire sera au-dessus  $v$  ou au-dessous  $v'$  de l'horizon de  $c$ . Et,

si on désigne par  $D$  la distance horizontale  $cn$  des points  $s$  et  $v$ , par  $v$  la longueur de la verticale  $vu$ , par  $s$  celle de la verticale  $sr$ , et par  $i$  la hauteur  $cs$  de l'éclimètre, tandis que  $\delta$  représentera l'inclinaison zénithale  $zcv$  observée par le § 305 page 177 : on aura  $v - (s + i) = \frac{D}{\lg \delta}$ ;

et  $(v - s) = i + \frac{D}{\lg \delta}$  sera l'expression générale de la différence de niveau d'un lieu de station  $s$  à un point de mire  $v$ .

Les valeurs de  $\lg \delta$  se déduiront, avec une exactitude suffisante, de la table du § 309, page 180, qui contient les quintuples des tangentes naturelles.

329. L'inclinaison zénithale observée  $\delta$ , avant d'entrer dans la formule précédente, devra subir des corrections ayant pour causes : 1.<sup>o</sup> l'excentricité horizontale de l'éclimètre par rapport au point de station; 2.<sup>o</sup> le mirage de la réfraction atmosphérique; 3.<sup>o</sup> la courbure du Globe terrestre; à moins qu'on n'ait reconnu l'inutilité de ces corrections, d'après les limites dont elles sont susceptibles.

Ainsi, lesdites corrections angulaires étant respectivement désignées par  $\epsilon'$ ,  $\rho'$  et  $\alpha'$ ; leur somme algébrique  $(\epsilon' + \rho' + \alpha') = k'$  composera l'erreur propre à l'inclinaison zénithale apparente  $\delta$ , qu'on remplacera, alors, par l'inclinaison zénithale réelle  $(\delta - k')$ .

330. Pour trouver l'erreur  $\epsilon'$ , qui affecte une inclinaison zénithale  $\delta$ , à cause de la position horizontalement excentrique de l'éclimètre par rapport au sommet de station; Soient :  $s$  la place de l'éclimètre dans l'observation de l'angle zénithal  $zsg$ , ou  $\delta$ , (fig. 19);  $c$  la trace de la verticale du repère de station sur l'horizon de  $s$ ;  $zcg$ , ou  $(\delta - \epsilon')$ , l'inclinaison zénithale de  $cg$ , qu'on supposera amenée dans le plan vertical  $zsg$  par  $dc' = dc$ ; la correction  $\epsilon' = \sec c'$  résultera de  $\frac{\sin \epsilon'}{\cos \delta} = \frac{CD - SD}{CG}$ , § 60 page 29, ou  $\epsilon' = \frac{r \cos \delta}{D \sin i}$ , qui sera négligeable : 1.<sup>o</sup> quand l'inclinaison

zénithale  $\delta$  différera peu d'un droit; 2.<sup>o</sup> lorsque l'excentricité ( $cd - sd$ ) sera très petite relativement au côté  $cg = D$ ; et 3.<sup>o</sup> à plus forte raison, quand ces deux circonstances existeront en même temps, comme on le reconnaît, presque toujours, dans les observations géodésiques.

331. La réfraction atmosphérique, en exhaussant chaque point de mire  $v$  sur sa véritable position  $v'$  (fig. 129), occasionne la différence  $vcv' = \rho'$ , entre l'inclinaison zénithale observée  $zcv = \delta$  et l'inclinaison zénithale réelle  $zcv' = \delta + \rho'$ .

Or, quoique l'angle de réfraction  $\rho'$  varie avec la diversité des causes qui le produisent, on a pu, cependant, lui assigner une valeur moyenne, comme il suit :

$v'qc$  étant la courbe de réfraction de  $v'$  en  $c$ , l'objet  $v'$  paraîtra en  $v$  suivant la direction  $cv$  tangente à cette courbe; et, pendant le même moment, un autre observateur, placé en  $v'$ , verrait le point  $c$  suivant la tangente  $v'c'$ .  $\rho'$  désignant l'angle de réfraction  $vcv'$ , et  $\delta$  l'inclinaison zénithale apparente  $zcv$ ,  $r'$  l'angle de réfraction  $c'v'c$ ,  $\Delta$  l'inclinaison zénithale apparente  $z'v'c'$ , et  $t'$  l'angle des verticales  $zr$ ,  $z'r$ ; on aura :

$$\left. \begin{aligned} \rho' &= 2^d - \delta - v'ct \\ r' &= 2^d - \Delta - cv't \\ 2^d &= t' + v'ct + cv't \end{aligned} \right\} \text{ d'où } \begin{aligned} \rho' + r' &= t' + 2^d (\delta + \Delta) \\ \text{et } \frac{\rho' + r'}{t'} &= \frac{t' + 2^d (\delta + \Delta)}{t'} \end{aligned}$$

Mais un grand nombre d'observations simultanément réciproques, faites dans plusieurs lieux et en différentes saisons, ont donné au rapport  $f = \frac{\rho' + r'}{t'}$  la même valeur pour chaque saison; savoir: 0,15 en été; 0,16 en automne et au printemps, et 0,18 en hiver. On a déduit, aussi, l'égalité des angles de réfraction  $\rho'$  et  $r'$  appartenant à deux observations réciproques, c'est-à-dire,  $\frac{\rho' + r'}{t'} = \frac{2\rho'}{t'} = f$ ; en sorte que  $\rho' = f \frac{t'}{2}$ .

Cela posé,  $r$  étant la distance de l'observateur au centre

du Globe, et  $D$  la distance des lieux  $c$  et  $v$  : l'angle  $\frac{t'}{2}$  comprendra un nombre de centigrades représenté par  $\frac{D}{2R \sin i}$ ; d'où  $\rho = \frac{fD}{2R \sin i}$  qui, à cause des valeurs approximatives :  $R=6377$  kilom.,  $\sin i' = \frac{1}{6400}$  et  $f=0,16$ , devient  $\rho = \frac{D}{12500^m}$ .

332. Quant à l'influence de la courbure du Globe terrestre sur les inclinaisons zénithales; on la reconnaîtra d'abord : en montrant que l'étendue, où l'on peut confondre, dans le sens vertical, l'horizon avec une calotte de sphère concentrique au Globe, est beaucoup moins considérable que celle où il sera indifférent de prendre cette calotte ou sa base, pour repère de projection, § 314 page 182.

Soient :  $cn$  (fig. 130) l'arc de *niveau vrai* appartenant à la surface d'une sphère concentrique au Globe, et  $t'$  l'angle des verticales  $vr$ ,  $cr$ ; la longueur  $nn$ , qui mesure verticalement le défaut de coïncidence de l'horizontale  $cn$  du *niveau apparent* avec l'arc  $cn$  du *niveau vrai*, égalera  $\frac{np}{\sin t'}$ , quantité bien plus grande que  $np$ , puisque l'angle au centre  $t'$  est toujours très petit. La partie verticale  $nn$  ne sera donc pas à négliger, par cela même qu'on pourra ne tenir aucun compte de la différence  $np$ , entre la longueur de l'arc terrestre et celle de sa tangente.

Ainsi,  $vn$  sera la vraie différence de niveau de  $v$  à  $c$ ; et l'angle  $vcz$ , à employer dans la formule du § 328, partira de  $cz$  perpendiculaire à la corde de niveau vrai  $cn$ , tandis que l'inclinaison zénithale observée  $zcv$ , ou  $\delta$ , s'appuyait sur  $cz$  perpendiculaire à la ligne de niveau apparent  $cn$ . L'angle  $zcz$ , équivalent à l'abaissement angulaire  $ncn$  ou  $\alpha'$  du niveau vrai  $cn$  sous le niveau apparent  $cn$ , sera donc la correction à retrancher de  $zcv$  pour former  $vcz$ . Or,  $ncn = \frac{t'}{2}$  et  $t = \frac{D}{R \sin i}$ ,  $D$  étant la distance  $cn$  et  $R$

le rayon du Globe ; par conséquent,

$$\alpha = \frac{D}{2R \sin 1'} = \frac{6400 D}{6377 \times 2000''} = \frac{D}{2000''}.$$

333. Examinons, maintenant, l'utilité et les limites des corrections à imposer aux observations verticales.

Nous avons déjà vu, § 330, que l'erreur  $\epsilon'$  d'excentricité horizontale était ordinairement négligée.

La correction  $\rho' = \left( \frac{D}{12500''} \right)$ , que la réfraction fait ajouter à une inclinaison zénithale apparente, § 331, n'atteignant un centigrade qu'à la distance 12500'' : on prévoit beaucoup de circonstances où cette correction peut être omise en géodésie.

L'angle  $\alpha' = \left( \frac{D}{2000''} \right)$ , qui, en vertu de la courbure terrestre, doit être retranché d'une observation zénithale, § 332, est assez considérable pour y avoir égard à des distances excédant 2000''.

Mais, ces deux erreurs  $\rho'$  et  $\alpha'$  accompagnant toutes les observations verticales, leur réunion  $(\alpha' - \rho') = k' = \left( \frac{D}{2400''} \right)$  composera la correction à soustraire de chaque angle zénithal apparent  $\delta$ , pour en faire l'inclinaison zénithale réelle  $(\delta - k')$  : lorsque cette correction  $k'$  dépassera l'inexactitude  $\varphi'$  permise dans la mesure des angles, § 83 page 43.

334. La formule des différences de niveau étant devenue  $v - (s + i) = \frac{D}{\lg(\delta - k')}$  ; si, à cause de l'expression (Q) du § 54, page 26, et de la fraction négligeable  $\frac{\lg k'}{\lg \delta}$ , on écrit  $v - (s + i) = \frac{D}{\lg \delta} + D \lg k'$  : on aura mis en évidence la quantité  $D \lg k'$ , que l'on devra ajouter à chaque différence de niveau apparent  $\frac{D}{\lg \delta}$  pour la rendre différence de niveau vrai.

Or, en négligeant l'erreur  $\epsilon'$  d'excentricité horizontale, § 330,  $k'$  se réduira à  $(\alpha' - \rho')$ ,  $\lg k' = \lg(\alpha' - \rho')$ ; et, comme  $\lg \alpha' = \frac{D}{2R}$ ,  $\lg \rho' = \frac{f \cdot D}{2R}$ ,  $\lg k'$  vaudra  $\frac{D}{2R} (1 - f)$  et  $D \lg k' = (1 - f) \frac{D^2}{2R}$  (qu'on trouverait immédiatement au moyen de  $vv' = cv' \lg vcv' = D \lg \frac{f \cdot t'}{2} = f D \lg \frac{t'}{2} = f \frac{D^2}{2R}$  (fig. 129), et de  $nn = D \lg ncn = D \lg \frac{t'}{2} = \frac{D^2}{2R}$  (fig. 130), fournissant ensemble  $nn - vv' = \frac{D^2}{2R} (1 - f) = D \lg k'$ ). En adoptant donc  $f = 0,16$ ,  $R = 6377$  kilomètres, § 331, il viendra :  $D \lg(\alpha' - \rho') = \left(\frac{D}{3900^m}\right)^2 \times 1^m$ .

Ainsi, on obtiendra la vraie différence de niveau  $v - (s + i)$  entre deux points  $v$  et  $c$ , § 328 page 189, soit : 1.<sup>o</sup> en retranchant, de l'inclinaison zénithale observée en  $c$ , l'angle  $k' = \left(\frac{D}{2400^m}\right)$  dû aux influences terrestres, pour calculer  $\frac{D}{\lg(\delta - k')}$ ; ou 2.<sup>o</sup> en cherchant immédiatement la différence de niveau apparent  $\frac{D}{\lg \delta}$ , à laquelle on ajoutera la correction  $D \lg k' = \left(\frac{D}{3900^m}\right)^2 \times 1^m$  provenant de la réfraction atmosphérique et de l'abaissement du niveau vrai sous le niveau apparent.

335. Pour faciliter, dans le nivellement, la transformation des résultats apparents en résultats réels: on a calculé une table des valeurs de  $k' = \left(\frac{D}{2400^m}\right)$ , et de  $D \lg k' = \left(\frac{D}{3900^m}\right)^2 \times 1^m$ , § 356 page 217, depuis  $D = 400^m$  jusqu'à  $D = 12000^m$  que l'on excède rarement en topographie.

Et, comme l'une et l'autre des corrections  $k'$  et  $D \lg k'$  sont négligeables quand  $D \lg k'$  ou  $\left(\frac{D}{3900^m}\right)^2 \times 1^m$  est plus

petit que  $\frac{M^2}{10000}$ , § 7 page 2, c'est-à-dire,  $D < 39^m \sqrt{M}$ ; on se dispensera de ces corrections pour les distances inférieures à 400<sup>m</sup>, lorsque l'échelle sera comprise de  $\frac{1}{100}$  à  $\frac{1}{1000}$ ; on les négligera au-dessous de 1200<sup>m</sup>, aux échelles de  $\frac{1}{1000}$  à  $\frac{1}{10000}$ ; et, enfin, on n'en tiendra compte qu'au-dessus de 4000<sup>m</sup> si l'échelle est de  $\frac{1}{10000}$  à  $\frac{1}{20000}$ .

C'est pourquoi, les colonnes de la table sont respectivement affectées à chacune de ces limites, § 356 page 217.

La correction  $k'$  ou  $D \operatorname{tg} k'$  ne sera, d'ailleurs, utile que si elle dépasse l'incertitude d'observation des inclinaisons zénithales; et on la négligera toujours, quand les repères verticaux auront été préalablement distribués en raison de l'erreur que comporte l'éclimètre employé, § 372.

336. Lorsque, en une station, on apercevra des objets dont on connaîtra les distances à cette station : on trouvera les différences de niveau entre tous ces points, considérés comme inaccessibles.

En effet, supposons que, de la station P (fig. 120, 131), on aperçoive les points de mire N, F, A, E, Q, U, L, dont on représentera les coordonnées verticales par  $n, f, a, e, q, u, l$ ;  $p$  étant la coordonnée verticale de P, et  $i$  la distance de l'éclimètre à l'horizon de ce point. Soient  $D_1, D_2, D_3, \dots$  les distances horizontales PN, PF, PA, ...;  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$  les inclinaisons zénithales, observées et corrigées, sur N, F, A, ...; nous aurons, d'après ce qui précède :

$$n - (p + i) = \frac{D_1}{\operatorname{tg} \delta_1}$$

$$f - (p + i) = \frac{D_2}{\operatorname{tg} \delta_2}$$

$$a - (p + i) = \frac{D_3}{\operatorname{tg} \delta_3}$$

$$e - (p + i) = \frac{D_4}{\operatorname{tg} \delta_4}$$

etc....

$$n - f = \frac{D_1}{\operatorname{tg} \delta_1} - \frac{D_2}{\operatorname{tg} \delta_2}$$

$$\text{d'où : } f - a = \frac{D_2}{\operatorname{tg} \delta_2} - \frac{D_3}{\operatorname{tg} \delta_3}$$

$$a - e = \frac{D_3}{\operatorname{tg} \delta_3} - \frac{D_4}{\operatorname{tg} \delta_4}$$

etc....

et, en assignant une valeur à l'une des verticales  $p, n, f, a, e, g, l$ , pour fixer le plan de repère, § 326 page 189, on conclura les longueurs des autres.

337. Au lieu de déterminer les différences de niveau entre les points qui correspondent visuellement à une seule station de l'éclimètre : on pourra coordonner verticalement plusieurs stations, en les rattachant isolément au même point de mire qui peut être inaccessible.

Car, le sommet  $E$  servant de point de mire aux stations  $v, g, j$  (fig. 120), dont  $v, g, j$  représentent les coordonnées verticales : et,  $i', i'', i'''$ , mesurant les distances verticales du centre de l'éclimètre aux repères de ces stations ;  $d', d'', d'''$ , les distances horizontales correspondantes ;  $\delta', \delta'', \delta'''$  les inclinaisons zénithales réelles de  $VE, GE, JE$  ; on aura :

$$\begin{aligned} \text{en } v, e - (v + i') &= \frac{d'}{\operatorname{tg} \delta'} \\ \text{en } g, e - (g + i'') &= \frac{d''}{\operatorname{tg} \delta''} \\ \text{en } j, e - (j + i''') &= \frac{d'''}{\operatorname{tg} \delta'''} \end{aligned} \quad \text{d'où :} \quad \begin{aligned} v - g &= (i'' - i') + \frac{d''}{\operatorname{tg} \delta''} - \frac{d'}{\operatorname{tg} \delta'} \\ g - j &= (i''' - i'') + \frac{d'''}{\operatorname{tg} \delta'''} - \frac{d''}{\operatorname{tg} \delta''} \end{aligned}$$

338. La coordonnée verticale  $e$  du point  $E$ , étant commune aux résultats des deux § précédents, lie ces résultats et rapporte au même plan de repère les verticales des points de mire  $A, E, F, L, N, Q, U$ , ainsi que celles des lieux de station  $G, J, P, V$  de la figure 120.

Si donc, on suppose les points remarquables d'un terrain partagés en groupes, dont le nivellement s'appuiera sur autant de repères : il suffira de coordonner verticalement ces repères, pour conclure les distances des points proposés à un même horizon, qu'il sera avantageux de placer *au-dessous* de tous ces points pour en rendre les cotes positives. Et, comme les sommets du canevas de la planimétrie ont satisfait aux conditions les plus favorables à l'enchaînement des observations, § 318 page 184 : on les choisira, aussi, pour repères du nivellement. En sorte que le canevas de ce nivel-



lement se rédigera en un tableau des coordonnées verticales, qu'on réunira à celui des coordonnées horizontales des sommets composant le réseau trigonométrique de la planimétrie, § 324 page 188 et § 362 page 227.

339. Et, de même que les positions horizontales des points conclus ont dû se rattacher à plusieurs côtés, § 322 page 187; de même, les coordonnées verticales desdits points ne mériteront confiance que par l'accord des résultats s'appuyant sur plusieurs stations de nivellement.

340. Nous avons vu, § 336, de quelle manière les coordonnées verticales  $a, e, f, l, \dots u$  des points de mire  $A, E, F, L, \dots U$  environnant la station  $P$  (fig. 120, 131) se rattachaient à la coordonnée  $(p + i)$  du centre de l'éclimètre; si on voulait que  $p$  appartint à un point particulier de la verticale de  $P$ , ce serait à ce point qu'on rapporterait la distance  $i$  de l'éclimètre, laquelle deviendrait négative quand l'observateur  $c$  serait au-dessous dudit point, comme dans la plupart des stations d'un canevas.

On pourra, cependant, rendre la formule des différences de niveau indépendante de la place  $c$  qu'occupe l'éclimètre sur la verticale de station  $zc$  (fig. 18), en remplaçant chaque angle zénithal  $zcd$  observé en  $c$ , par l'inclinaison  $\Delta = zsd$  ou  $z\sigma d$ , supposée prise en  $s$  ou en  $\Sigma$ : au moyen de la correction  $(\delta - \Delta)$  due à l'excentricité verticale  $cs$ , ou  $c\Sigma$ , mesurée, pour cela, au § 319 page 185. Cette réduction est fournie par  $\frac{(\delta - \Delta)}{1} = \frac{i}{D} \frac{\sin \delta}{\sin 1''}$ , § 59 page 29, qui aura le signe de  $i$ : positif quand l'éclimètre sera au-dessus du repère  $s$ , et négatif lorsque l'éclimètre sera au-dessous du repère  $\Sigma$ . On trouvera d'ailleurs, très promptement, ladite correction au moyen d'une table des valeurs  $\frac{\sin u}{\frac{D}{1''} \sin 1''}$  ayant pour arguments:  $\frac{D}{1''}$  et l'angle  $u$  ou  $\delta$ .

Ce transport d'une inclinaison zénithale, qui est facultatif dans le nivellement topographique, sert à rendre réciproques les observations zénithales du § 296 page 171 et celles du § 331 page 191.

341. Lorsque la région terrestre à décrire aura trop d'étendue, pour pouvoir être rapportée à un seul élément du Globe, § 314 page 182 : on la couvrira d'un canevas sphérique, dont chaque triangle limitera l'espace susceptible d'être projeté sur un élément particulier de la Sphère terrestre.

Les angles de ces triangles *résulteront* des angles observés et corrigés, comme ceux des triangles rectilignes; et les sommets du canevas sphérique se coordonneront par leurs LATITUDES, LONGITUDES et ALTITUDES résultant, aussi, des trois coordonnées d'un seul de ces points, et de l'azimuth d'un côté sphérique par rapport au méridien de l'une de ses extrémités.

S'il arrive que des obstacles insurmontables s'opposent à l'enchaînement des triangles, dans les contrées qu'on doit lier géographiquement : on sera obligé, pour en coordonner les projections sphériques, de déterminer la latitude et la longitude d'un lieu de chacune de ces contrées, et d'adopter la méridienne et la perpendiculaire de ce lieu pour axes principaux de la projection correspondante; le niveau de l'Océan étant, d'ailleurs, choisi pour origine des altitudes ou coordonnées projectantes de chaque contrée.

Comme les observations et les calculs d'un canevas géodésique du premier ordre exigent des connaissances mathématiques bien supérieures à celles de cet ouvrage; nous nous bornons à indiquer les circonstances qui en nécessitent l'emploi et auxquelles les opérations topographiques, proprement dites, sont toujours étrangères.

*Exemple de la division d'un Levé en feuilles de détail.*

342. Nous allons appliquer la théorie précédente au terrain, sur lequel MM. les Élèves de l'École spéciale militaire sont exercés à la Topographie, tant régulière qu'irrégulière.

Ce terrain devait être distribué en huit parties, occupant simultanément autant de sections de quatre Élèves. Son étendue, subordonnée au peu de temps que l'École destine à ce genre d'étude, était limitée : au Nord, par le village de

Bailly ; à l'Est , par la Ménagerie du Parc de Versailles ; au Sud , par le Hameau de Bouviers ; et à l'Ouest , par le Château de Ternay.

On a donné , à la carte régulière , l'échelle  $\frac{1}{5000}$  susceptible des plus minutieux détails ; en sorte que chacune des huit feuilles rectangulaires , ayant 4 décimètres de longueur sur 3 décimètres de largeur , correspond à une superficie de 300 hectares.

343. Le Clocheton-*Est* du bâtiment principal de l'École a servi d'observatoire , pour découvrir une étendue considérable au Nord , à l'Est et à l'Ouest ; et , à ce premier lieu de station , § 317 page 184 , nous avons *d'abord* noté plusieurs points de mire dans l'ordre où nous les avons aperçus , pour en relever *ensuite* les directions avec une boussole numérique appuyée , par son couvercle § 195 page 115 , sur la balustrade du clocheton , et dresser le tableau suivant :

*Projet de tour-d'horizon n.º 1 , au Clocheton-Est de l'École , observé avec une boussole à limbe mobile , numéroté de gauche à droite.*

| POINTS DE MIRE.                                                                     | DÉSIGNATION. | COUPS D'ALIDADE.  |
|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------|-------------------|
| <i>Cheminée-Sud</i> du Pavillon-nord de la grille de Saint-Cyr. . . . .             | (1)          | 80 <sup>5</sup>   |
| <i>Pignon-Sud</i> du plus haut faite de la Ménagerie.                               | U            | 92                |
| <i>Arbre</i> du Parc près du Canal. . . . .                                         | (2)          | 131               |
| <i>Arbre</i> de Bailly. . . . .                                                     | (3)          | 150               |
| <i>Arbre</i> de l'ancienne avenue de Villepreux , près de la Grille Royale. . . . . | G            | 152               |
| <i>Pignon-Sud</i> de la grange de Moulineaux. . . . .                               | K            | 169               |
| <i>Clocher</i> de Bailly. . . . .                                                   | B            | 172               |
| <i>Pignon-Sud</i> du plus haut faite de la Faisanderie-Moulineaux. . . . .          | L            | 182               |
| <i>Clocher</i> de Noisy. . . . .                                                    | N            | 187               |
| <i>Arbre</i> de l'ancienne avenue de Villepreux sur le chemin de Pontally. . . . .  | P            | 207               |
| <i>Clocher</i> de Fontenay. . . . .                                                 | F            | 251               |
| <i>Clocher</i> de Saint-Cyr. . . . .                                                | (4)          | 254               |
| <i>Pignon-Ouest</i> de la Chapelle-Saint-Jean. . . . .                              | (5)          | 260 $\frac{1}{2}$ |
| <i>Arbre</i> du bois de la Chiffe. . . . .                                          | C            | 264 $\frac{1}{2}$ |
| <i>Cheminée-Ouest</i> de l'Anberge de la Boule - d'Or.                              | A            | 333               |

et, nous avons tracé, à l'aide du rapporteur circulaire § 222, ces directions sur une page du calepin (*fig. 121*), intitulée : *Tour-d'horizon provisoire, au Clocheton-Est de l'Ecole.*

Nous transportant, ensuite, à l'arbre de Villepreux; nous y avons noté les objets susceptibles d'entrer dans le tour-d'horizon, savoir :

*Projet de tour-d'horizon n.° 2, à l'arbre de Villepreux.*

| POINTS DE MIRE.                                    | DÉSIGNA-<br>TION. | COUPS<br>D'ALIDADE. |
|----------------------------------------------------|-------------------|---------------------|
| <i>Clocheton-Est de l'Ecole.</i> . . . . .         | E                 |                     |
| <i>Arbre de Pontally.</i> . . . . .                | P                 |                     |
| <i>Pignon de la Faisanderie.</i> . . . . .         | L                 |                     |
| <i>Clocher de Bailly.</i> . . . . .                | B                 |                     |
| <i>Clocher de Noisy.</i> . . . . .                 | N                 |                     |
| <i>Fronton-Est du château de Ternay.</i> . . . . . | T                 |                     |
| <i>Chapelle-Saint-Jean.</i> . . . . .              | (5)               |                     |
| <i>Arbre du bois de la Chiffe.</i> . . . . .       | C                 |                     |
| <i>Auberge de la Boule-d'Or.</i> . . . . .         | A                 |                     |
| <i>Clocher de Fontenay.</i> . . . . .              | F                 |                     |
| <i>Clocher de Saint-Cyr.</i> . . . . .             | (4)               |                     |

Nous avons relevé les directions de ce deuxième tour-d'horizon (*fig. 122*), avec une espèce de planchette, § 237 page 134, ayant une règle pour alidade et, pour tablette, le calepin soutenu par un trépied fait de trois baguettes passées dans un nœud. Et nous n'avons pas quitté cette station, sans reconnaître que, dans la direction de l'arbre P, le terrain paraissait favorable à la mesure d'une base.

Le troisième tour-d'horizon a été fait au clocher de Noisy en employant un graphomètre, § 188 page 112, posé dans les croisées supérieures de ce clocher :

*Projet de tour-d'horizon n.º 3, au clocher de Noisy, observé avec un graphomètre à limbe fixe, numéroté de droite à gauche.*

| POINTS DE MIRE.                    | DÉSIGNA-<br>TION. | COUPS<br>D'ALIDADE. |
|------------------------------------|-------------------|---------------------|
| Clocheton-Est de l'École. . . . .  | E                 | 268                 |
| Faisanderie de Moulineaux. . . . . | L                 | 31                  |
| Arbre de la Grille Royale. . . . . | G                 | 42                  |
| Grange de Moulineaux. . . . .      | K                 | 44                  |
| Ménagerie. . . . .                 | U                 | 53 $\frac{1}{2}$    |
| Arbre du Parc. . . . .             | (2)               | 56                  |
| Arbre de Bailly. . . . .           | (3)               | 65                  |
| Clocher de Bailly. . . . .         | B                 | 106                 |
| Ternay. . . . .                    | T                 | 391                 |
| Chapelle-Saint-Jean. . . . .       | (5)               | 399                 |
| Fontenay. . . . .                  | F                 | 4                   |
| Arbre de la Chiffe. . . . .        | C                 | 5                   |
| Arbre de Pontally. . . . .         | P                 | 8                   |
| Auberge de la Boule-d'Or. . . . .  | A                 | 21                  |

Et l'on a tracé les coups d'alidade : soit avec un rapporteur, ou, mieux encore, au moyen d'une circonférence divisée de dix en dix grades, laquelle, décalquée sur la page de chaque tour-d'horizon, abrégera beaucoup ces dispositions préparatoires (*fig. 123*).

En quittant Noisy, où l'on a dépassé la limite-nord de l'étendue à lever; on a parcouru le terrain qui, précédemment, a été jugé propre à la mesure d'une base, et l'on s'est assuré que l'arbre de Pontally, aperçu de la station arbre de Villepreux, terminait avantageusement cette base. C'est pourquoi, on s'y est arrêté pour en relever, par l'un des moyens précédents, le tour d'horizon n.º 4, appuyé sur v et contenant les points N, B, (3), K, L, (2), G, U, Q, (1), E, (4), A, C, F, (5) et T (*fig. 124*).

Se dirigeant, ensuite, à l'Ouest; on a préparé et observé un tour-d'horizon à l'arbre de la Grille Royale, avec un petit goniomètre à simple réflexion :

*Projet de tour-d'horizon n.º 5, à l'arbre de la Grille Royale, observé avec un goniomètre à simple-réflexion, dont le limbe fixe est numéroté de gauche à droite, § 211 page 122.*

| POINTS DE MIRE.                                 | DÉSIGNA-<br>TION. | COUPS<br>D'ALIDADE. |
|-------------------------------------------------|-------------------|---------------------|
| Clocher de Noisy. . . . .                       | N                 | 149 <sup>8</sup>    |
| Faisanderie de Moulineaux. . . . .              | L                 | 116                 |
| Arbre de Pontally. . . . .                      | P                 | 92                  |
| Clocher de Fontenay. . . . .                    | F                 | 62                  |
| Ternay. . . . .                                 | T                 | 55                  |
| Chapelle-Saint-Jean. . . . .                    | (5)               | 40                  |
| Arbre de la Chiffe. . . . .                     | C                 | 36 $\frac{1}{2}$    |
| Clocher de Saint-Cyr. . . . .                   | (4)               | 11                  |
| Auberge de Boule-d'Or. . . . .                  | A                 | 4                   |
| Clocheton-Est de l'École. . . . .               | E                 | 397                 |
| Cheminée du Garde-Polygone. . . . .             | Q                 | 387                 |
| Cheminée du pavillon de la grille de Saint-Cyr. | (1)               | 378 $\frac{1}{2}$   |
| Arbre de Bailly. . . . .                        | (3)               | 204                 |
| Clocher de Bailly. . . . .                      | B                 | 170                 |
| Grange de Moulineaux. . . . .                   | K                 | 152                 |

Le tracé des directions contenues dans ce tableau occupe la cinquième page du calepin (*fig. 125*).

Ayant ainsi exploré, par cinq stations, le terrain dans la plus grande partie de son étendue, il faut reconnaître la région sud de Saint-Cyr, qu'une côte très couverte sépare des précédentes recherches.

A cet effet, on s'est porté au déclin du plateau qui domine Saint-Cyr, où l'on a bientôt trouvé une position (*fig. 120*), de laquelle on découvre la campagne au nord et à l'ouest, en même temps qu'on aperçoit quelques points au sud; et, à cette nouvelle station marquée par un piquet, on a relevé le sixième tour-d'horizon, qui, astreint à s'appuyer sur trois points de mire déjà deux fois observés, a été composé comme il suit :

*Projet de tour - d'horizon n.° 6, au point auxiliaire J.*  
 observé avec une boussole à limbe fixe, numéroté de  
 droite à gauche, § 196 page 116.

| POINTS DE MIRE.                                     | DÉSIGNA-<br>TION. | COUPS<br>D'ALIDARE. |
|-----------------------------------------------------|-------------------|---------------------|
| Ménagerie. . . . .                                  | U                 | 1228 $\frac{1}{2}$  |
| Arbre du Parc. . . . .                              | (2)               | 167                 |
| Grille de Saint-Cyr. . . . .                        | (1)               | 175                 |
| Arbre de Bailly. . . . .                            | (3)               | 183                 |
| Arbre de la Grille Royale. . . . .                  | G                 | 192                 |
| Clocher de Bailly. . . . .                          | B                 | 198                 |
| Grange de Moulineaux. . . . .                       | K                 | 200                 |
| Clocher de Noisy. . . . .                           | N                 | 212                 |
| Faisanderie de Moulineaux. . . . .                  | L                 | 213                 |
| Arbre de Pontally. . . . .                          | P                 | 232                 |
| Arbre de Villepreux. . . . .                        | V                 | 249                 |
| Clocher de Fontenay. . . . .                        | F                 | 253 $\frac{1}{2}$   |
| Clocheton-École. . . . .                            | E                 | 268 $\frac{1}{2}$   |
| Ternay. . . . .                                     | T                 | 276 $\frac{1}{2}$   |
| Arbre de la Chiffe. . . . .                         | C                 | 279                 |
| Auberge de la Boule-d'Or. . . . .                   | A                 | 307 $\frac{1}{2}$   |
| Arbre près l'Étang de Saint-Quentin. . . . .        | R                 | 335 $\frac{1}{2}$   |
| Regard de l'ancien Étang de Bois-Robert. . . . .    | (6)               | 354 $\frac{1}{2}$   |
| Cheminée-Est d'une maison de Bouviers. . . . .      | H                 | 393                 |
| Cheminée-Sud du pavillon Porte-Bois-Robert. . . . . | (7)               | 20                  |

dont on a traduit graphiquement les résultats, dans la sixième feuille du calepin (*fig.* 126).

Et, pour achever ces courses préliminaires, on s'est rendu à l'arbre *a* près de l'étang de Saint-Quentin, où le tour-d'horizon, ayant le n.° 7, comprend les seuls points *c*, *a* et *n* (*fig.* 127).

344 On assemblera les précédents tours - d'horizon, § 318 : en décalquant, d'abord, celui de l'École (*fig.* 121) sur la direction quelconque *ev* (*fig.* 120), dont l'extrémité *v* sera choisie pour représenter le centre du tour-d'horizon fait à l'arbre de Villepreux (*fig.* 122), qu'on décalquera, alors, en le déclinant sur *ve*; ce qui rattachera graphiquement les points *a*, *b*, *c*, *L*, *P*, *N*, 4), 5) au côté *ev*.

Le troisième tour-d'horizon, celui de Noisy (*fig. 123*), décalqué autour de N (*fig. 120*) par l'une des déclinaisons NE, NV, marquera les points F, G, K, T, U, (2) et (3).

Le quatrième tour-d'horizon, fait à l'arbre de Pontally (*fig. 124*), s'appuyant sur l'arbre de Villepreux : on en glissera le rayon PV sur la direction précédemment tracée VR (*fig. 120*), jusqu'à ce que son rayon PC rencontre le point C, § 72 page 36. La station P ainsi déterminée; on décalquera les autres rayons du tour-d'horizon, qui passeront respectivement par des points déjà placés.

Le cinquième tour-d'horizon, préparé à l'arbre de la Grille royale (*fig. 125*), étant décalqué en G (*fig. 120*) sur l'un des appuis GN, GP, GE, rappellera la correspondance visuelle de G avec les objets (3), B, K, N, L, P, F, T, (5), C, (4), A, E, (1), et déterminera le point Q, déjà rayonné par le quatrième tour-d'horizon en P.

Quant au sixième tour-d'horizon relevé en J (*fig. 126*), on l'introduira dans le canevas (*fig. 120*) : en appuyant simultanément les rayons JG, JP, JC sur les points G, P, C, pour décalquer d'abord le centre J, § 77 page 39, et ensuite les autres rayons JR, J(6), JH, J(7).

Le tour-d'horizon n.º 7, pris à l'arbre R de l'étang Saint-Quentin (*fig. 127*), sera décalqué en faisant tourner par les points C et A (*fig. 120*) les côtés RC, RA de l'angle CRA jusqu'à ce que le sommet R rencontre le côté JR, § 76 page 38; on marquera, ensuite, la direction RH donnant le dernier point H du canevas provisoire qui coordonnera graphiquement tous les objets reconnus.

345. On jugera, d'ailleurs, de la longueur approximative des côtés de ce canevas : en les comparant à l'un deux, évalué sur des renseignements itinéraires.

Ainsi, ayant été informé qu'un piéton met 28 à 30 minutes pour se rendre de l'Ecole à Ternay, on a attribué 25 hectomètres au côté ET, § 151 page 86, pour construire l'échelle d'hectomètres OX (*fig. 120*), qui fera estimer tous les côtés du canevas provisoire. On tracera, ensuite, des axes



partageant ce canevas en ses huit feuilles, jusqu'aux limites primitivement imposées § 342, page 198.

Il sera, alors, facile de choisir les points qui, résultant du plus petit nombre de stations, s'enchainent par les meilleures formes de triangle et fournissent, à chaque feuille, une base ou même plusieurs bases quand on a jugé que le terrain, correspondant à cette feuille, était très chargé, § 324 page 188.

Voilà comment on n'a conservé que 17 des points reconnus (*fig. 120*), savoir : A, B, E, F, H, K, L, N, Q, T, U remarquables naturellement; et les arbres C, G, P, R, V, ainsi que la station J, qui auront besoin d'être signalés; on a supprimé, aussi, les stations provisoires du clocheton de l'École et du clocher de Noisy, pour se borner aux cinq stations V, P, G, J, et R. Et l'on a résolu de rattacher :

|             |   |    |                  |
|-------------|---|----|------------------|
| C           | à | VP | servant de base. |
| G.          | . | .  | CP               |
| J.          | . | .  | CP et GP         |
| N, B, F, T. | . | .  | VP et GP         |
| A, E.       | . | .  | JG et GP         |
| K, L.       | . | .  | JP et GP         |
| Q.          | . | .  | GP               |
| U.          | . | .  | JP               |
| R.          | . | .  | CJ               |
| H.          | . | .  | RJ               |

346. Quant à l'exactitude désirable dans l'observation des angles : nous recourrons à la relation  $\sin \varphi < \frac{e}{c}$  du § 83 page 43, qui, en vertu de  $e = \frac{m^m}{10000}$  § 7 page 2, et de  $\sin \varphi = \frac{\varphi}{6400}$  § 54 page 25, se transforme en  $\varphi < \frac{4m^m}{5e}$ , et, pour le cas  $m = 5000$ ,  $\varphi < \frac{40}{e}$  hectom.

Or, le plus grand côté *pu* de notre canevas (*fig. 120*) étant

d'environ 36 hectomètres, la limite de  $\varphi$  deviendra  $\frac{10}{9}$  ou 1; ainsi, les angles, dont les côtés atteindront 36 hectomètres, devront être obtenus à 1 centigrade près, et ceux, dont les côtés ne dépasseront pas 20 hectomètres, seront convenablement appréciés à moins de 2 centigrades.

Mais, le limbe du goniomètre-répétiteur, à notre disposition, ayant 12 centimètres de rayon, sa plus petite division *longue d'un millimètre* représente un demi-grade, § 112 page 64, et son vernier *dix* permet de lire chaque coup d'alidade à 2', 5 près: tellement que la simple graduation d'un angle sera donnée à 5' d'incertitude de lecture. Il faudra donc mesurer: par leur quintuple-graduation, les angles dont les côtés auront 36 hectomètres; par leur triple-graduation, les angles ayant des côtés qui ne dépasseront pas 24 hectomètres; et enfin, par leur double-graduation, ceux dont les côtés seront inférieurs à 20 hectomètres; en se rappelant de conduire ces observations deux fois plus loin, pour chacun des deux angles de tout triangle dont on devra conclure le troisième angle, § 322 page 187.

347. On préparera alors les stations définitives: par la désignation des angles horizontaux et verticaux qu'on y doit mesurer, avec le nombre indiquant la multiple-graduation imposée à chacun de ces angles; pour que l'observateur n'ait qu'à écrire les graduations des coups d'alidade en regard de leurs titres, § 357 page 218.

Ainsi, la première station définitive étant sur l'emplacement même du jalon 1: on y évitera toute réduction au centre, en ne faisant planter ce signal qu'au moment de quitter la station.

Cette première station (*fig. 120, 126*) comprendra:

9 Angles: { 4.GJA, 4.GJC, 4.GJE, 4.GJP, 6.KJP,  
6.LJP, 6.UJP, 4.CJR, 4.HJR.

10 Inclinaisons zénithales: { 2.JE, 2.JC, 2.JA, 2.JR, 2.JH,  
2.JN, 2.JG, 4.JK, 4.JL, 4.JP.

La deuxième station définitive, à l'arbre R près de l'étang Saint-Quentin (*fig.* 120, 127) :

2 Angles : 6.HRJ, 6.JRC.

3 Incl. zénith. : 2.RH, 4.RJ, 4.RC.

La troisième station définitive, à l'arbre G de la Grille Royale (*fig.* 120, 125) :

11 Angles : { 4.PGF, 6.PGT, 6.PGC, 6.PGA, 6.PGE, 4.PGQ,  
4.PGJ, 6.BGP, 4.PGK, 4.PGN, 4.PGL.

et { CGJ composé de PGJ — PGC  
AGJ. . . . . PGJ — PGA  
EGJ. . . . . PGJ — PGE

12 Incl. zénith. : { 2.GP, 2.GF, 4.GT, 4.GC, 4.GA, 2.GE,  
2.GQ, 4.GJ, 4.GB, 2.GK, 6.GN, 2.GL.

La quatrième station définitive, à l'arbre P de Pontally (*fig.* 120, 124).

17 Angles : { 10.JPU, 4.JPG, 6.JPL, 6.JPK, 8.GPN, 6.GPB,  
6.QPG, 6.EPG, 6.APG, 6.CPG, 4.FPG, 8.TPG,  
6.VPC, 4.VPF, 4.VPT, 8.NPV, 6.BPV.

et { CPJ composé de CPG — JPG  
GPL. . . . . JPL — JPG  
GPK. . . . . JPK — JPG

14 Incl. zénith. : { 2.PV, 2.PT, 2.PF, 2.PC, 4.PA, 4.PE, 4.PJ,  
2.PQ, 6.PU, 2.PG, 2.PL, 2.PK, 4.PB, 4.PN.

Enfin, la cinquième station définitive, à l'arbre V de Villepreux (*fig.* 120, 122) :

5 Angles : 4.TVP, 6.CVP, 4.FVP, 8.PVB, 8.PVN.

6 Incl. zénith. : 2.VT, 2.VC, 2.VF, 2.VP, 4.VB, 4.VN.

Il sera commode de joindre aux dispositions précédentes l'extrait des tours-d'horizon provisoires, contenant les directions définitives marquées en traits pleins dans les figures 122, 124, 125, 126 et 127 ; afin que, à son arrivée en station, l'observateur, ayant reconnu l'une de ces directions, puisse aussitôt découvrir les autres et noter leurs signale-  
ments.

348. Supposons-nous, maintenant, en station à l'arbre  $r$  (fig. 131); et soit  $s'$  la place à donner au goniomètre, pour qu'on puisse diriger simultanément ses lunettes sur le drapeau qui signale  $s$  et sur le pignon-sud  $u$  du plus haut faite de la Ménagerie, afin d'intercepter l'angle  $ss'u = s$ .

Le limbe étant mis dans le plan de cet angle, par le procédé du § 187 page 112: on fera marquer zéro à l'index  $b$  (fig. 78), puis on effectuera, cinq fois de suite, la prompte-manœuvre qui double la mesure de l'angle  $ss'u$ , § 247 page 141, pour obtenir la décuple-graduation préliminairement assignée à cet angle, laquelle graduation  $328^{\circ},075$ , correspondra à l'index  $b$ . On donnera ensuite, sur le milieu  $c$  du tronc de l'arbre  $r$ , le coup d'alidade  $t = 73^{\circ}$ , dont on retranchera  $328^{\circ}$  pour avoir  $us'c = y = 145^{\circ}$ , puis  $ss'c = s + y = 177^{\circ}$ .

Et, si l'on veut affranchir la décuple-mesure de l'angle  $ss'u$ , de l'excentricité que pourrait avoir l'index  $b$  par rapport au limbe, § 178 page 106: on lira les graduations  $196^{\circ},775$  et  $524^{\circ},825$  indiquées par le second index  $a$ , au commencement et à la fin de la multiple-mesure, afin d'écrire:  $10 ss'u = \frac{b' - b}{2} + \frac{a' - a}{2} = \frac{b' + a' - a}{2} = 328^{\circ},062$ , dont le dixième,  $32^{\circ},806$ , servira d'amplitude à l'angle  $ss'u$  ou  $s$ .

On observera, § 304 page 176, la quadruple-inclinaison zénithale de  $s's$  ou  $4\Delta = 394^{\circ},175$  et la sextuple-inclinaison zénithale de  $s'u$  ou  $6\delta = 598^{\circ},575$ .

Enfin, on mesurera l'excentricité horizontale  $s'c = r$  composée de  $s'x + xc = 1^{\circ},83$ , ainsi que l'élévation  $s'p'$ , ou  $cp' = 1^{\circ},25$  du centre du goniomètre sur le sol, et, au besoin, la hauteur  $pc = 14^{\circ},75$  qui est l'excentricité de  $s'$  au-dessous du repère signalé  $p$ .

On facilite ces détails d'observation, en les inscrivant sur un registre, § 357 page 218, préparé en même temps que la distribution des stations, et sur lequel on a biffé les numé-

ros excédant les multiples-mesures imposées, § 347, aux angles horizontaux et verticaux.

Et, afin de s'assurer que l'observation marche régulièrement, on écrit le dernier coup d'alidade de chaque double-mesure, pour en déduire aussitôt l'angle simple correspondant, qui doit se reproduire avec peu de variation.

On ne quittera pas la place  $s'$  (fig. 431) avant d'avoir mesuré les angles qu'on y peut intercepter, afin d'employer la même excentricité et d'utiliser l'un des angles  $y$  et  $s + y$ , qui sera souvent commun à plusieurs observations, ainsi qu'on le voit à l'angle  $ss'L$ , où  $s + y = ss'c$  dont l'amplitude 177° a été précédemment trouvée.

Une nouvelle position  $s''$  du goniomètre étant nécessaire pour obtenir d'autres angles  $EPG$ ,  $JPG$ ..., on y agira comme en  $s'$ , en remplissant les indications du registre géodésique § 357.

349. L'angle observé  $ss'u$  devant être réduit à l'horizon et au centre pour devenir angle du canevas; on trouvera sa correction en résolvant numériquement la formule du § 320 page 186, de la manière indiquée § 358 page 219, où les logarithmes s'arrêtent à la troisième décimale.

On abrégierait ce calcul, avec des tables fournissant immédiatement chacun des termes de la correction, savoir :

1.<sup>o</sup> la table des valeurs  $\left(10000 - \frac{\Delta + \delta}{2}\right)^2 \lg \frac{s}{2} \sin i'$ , où

l'on entre avec l'angle  $s$  et le nombre  $\left(20000 - (\Delta + \delta)\right)$  ou  $2p$ ;

2.<sup>o</sup> celle des valeurs  $\left(\frac{\Delta - \delta}{2}\right)^2 \cot \frac{s}{2} \sin i'$ , dont les arguments sont l'angle  $s$  et le nombre  $(\Delta - \delta)$  ou  $2q$ ;

3.<sup>o</sup> la table des valeurs  $\frac{\sin u}{\frac{n}{1000} \sin r'}$ , déjà recommandée

pour la réduction des inclinaisons zénithales au sommet de station § 340, et qui a pour arguments l'angle  $u$  et le nom-

bre  $\frac{D}{1''}$ , produit aussitôt les facteurs  $\frac{\sin(s+y)}{\frac{d}{1''} \sin 1'}$  et  $-\frac{\sin y}{\frac{g}{1''} \sin 1'}$ ,

dont on fera la somme pour la multiplier par  $\frac{r}{1''}$ .

350. Avant d'effectuer les corrections des angles qui ont été relevés à toutes les stations définitives, il faudra rejeter ceux qu'un mauvais pointé empêchera d'appartenir au canevas : en soumettant les angles d'un pointé douteux à l'épreuve du § 81 page 41, comme nous le faisons pour ceux qui doivent rattacher, aux stations J, G et P. (fig. 120), le pignon K dont le signallement a été incertain.

Cette condition est exprimée par :

$$\sin(KGP + KPG) \frac{\sin PGJ}{\sin KGP} = \sin(KJP + KPJ) \frac{\sin PSG}{\sin KJP}$$

or, l'observation fournit immédiatement :

$$KGP = 54^{\circ} 9' 42''$$

$$KJP = 32^{\circ} 50' 9''$$

$$KPG = 30^{\circ} 8' 76''$$

$$KPJ = 76^{\circ} 22' 6''$$

$$PGJ = 112^{\circ} 1' 80''$$

$$PJG = 42^{\circ} 6' 02''$$

et, en s'arrêtant à la troisième décimale des logarithmes, on aura :

$$\log. \sin(KGP + KPG) = 9.989$$

$$\log. \sin(KJP + KPJ) = 9.996$$

$$\log. \sin PGJ = 9.992$$

$$\log. \sin PJG = 9.793$$

$$c \log. \sin KGP = 0.119$$

$$c \log. \sin KPJ = 0.311$$

$$\log. 1.^{er} \text{ membre} = 0.100$$

$$\log. 2.^e \text{ membre} = 0.100$$

351. Pour accomplir les calculs trigonométriques du § 321; on dispose dans une colonne, § 359 pag. 220 et suiv., chaque triangle du canevas : en écrivant d'abord le sommet qu'il s'agit de déterminer, puis, au-dessous, les extrémités du côté opposé que l'on place dans le même ordre pour tous les triangles, par exemple, en commençant par l'extrémité droite, afin de pouvoir construire et coordonner ces triangles avec les seuls résultats numériques; et l'on fera succéder immédiatement les triangles qui rattachent le même sommet à plusieurs côtés.

Une seconde colonne contient, vis-à-vis la désignation de chaque point de la première colonne, l'angle correspondant, qu'on aura préalablement corrigé, s'il n'a pas été conclu, de l'erreur d'observation qui est, pour chaque triangle, la différence de deux droits à la somme de ses trois angles, tels qu'ils ont été mesurés et réduits.

La troisième colonne, intitulée *calcul des rapports des côtés*, se divise en deux parties : on place, dans la première, le complément-logarithme du sinus de l'angle au sommet et les logarithmes des sinus des deux autres angles; et, dans l'autre partie, on forme les logarithmes des rapports des côtés : en ajoutant le complément-logarithme à chacun des logarithmes sinus, d'après les formules du § 68 page 34.

Enfin, une quatrième colonne, divisée aussi en deux parties, sera destinée au *calcul des côtés*, dès que l'on aura la longueur de la base fondamentale, dont le logarithme sera ajouté à chacun des précédents logarithmes-rapports, pour passer, ensuite, aux nombres correspondants.

Ainsi, les triangles qui rattachent le point J aux côtés GP, PC (fig. 120) étant inscrits sous les n.<sup>os</sup> 3 et 4 du tableau, § 359 page 220 ; les trois angles observés de l'un JGP, sont devenus, après réduction à l'horizon et au centre :  $J = 42^{\circ}.657$ ,  $G = 112^{\circ}.125$ ,  $P = 42^{\circ}.242$ ; et comme leur somme  $200^{\circ}.024$  l'emporte de  $2'.4$  sur deux droits, on retranchera  $\frac{2'.4}{3}$  ou  $0'.8$  de chacun d'eux, pour que ces angles appartiennent au même triangle. Les deux angles J et P du triangle JPC ayant été seuls mesurés, on a dû conclure le troisième angle  $C = 102^{\circ}.398$ .

Dans le triangle JGP : les rapports  $\frac{JP}{PG}$ ,  $\frac{JG}{PG}$  se calcule-

ront par  $\frac{JP}{PG} = \frac{G}{J} = \frac{\sin G}{\sin J}$ ,  $\frac{JG}{PG} = \frac{P}{J} = \frac{\sin P}{\sin J}$ , et :

$$\log \frac{G}{J} = \text{compl. log. sin J} + \log. \sin G = 0.20695 + 9.99208 = 0.19903$$

$$\log \frac{P}{J} = \text{compl. log. sin J} + \log. \sin P = 0.20695 + 9.81460 = 0.02155$$

de sorte que, en remplaçant  $\log. j$  par sa valeur 3.25658 résultant de la solution du triangle  $GPC$  inscrit sous le n.º 2 : il ne s'agira plus que d'ajouter cette valeur successivement à celles de  $\log. \frac{g}{j}$  et  $\log. \frac{p}{j}$ , pour avoir  $\log. g = 3.45561$  et  $\log. p = 3.27813$  qu'on écrira au-dessous de  $\log. j$ ; puis, on passera aux nombres correspondants :  $g = 1P = 2855^m.0$ ,  $p = 1G = 1897^m.3$ .

Un semblable calcul, appliqué au triangle  $JPC$ , conduira aux valeurs de  $CJ = 2104^m.4$ ,  $JP = 2858^m.7$ ; et, ce dernier côté différant de  $3^m.7$  du côté  $JP$  donné par le précédent triangle, on adoptera la valeur moyenne  $JP = 2858^m.8$ .

Quant à la base  $VP$ , destinée à la comparaison de tous les côtés du canevas, § 343 page 201; on l'a mesurée deux fois, le 15 mai 1840, avec une chaîne de 20 mètres, § 132 page 175. Et, la première opération, dans le sens  $PV$ , ayant donné  $1473^m.1$ , tandis que la mesure dans le sens  $VP$  a produit  $1474^m.5$ ; on a adopté la moyenne  $1473^m.8$  pour longueur de la base.

352. Les coordonnées horizontales des sommets du canevas s'obtiennent par les différences de ces coordonnées, deux-à-deux, après que les axes ont été fixés au moyen des coordonnées arbitraires  $e'$ ,  $e''$  d'un point  $e$  et de l'azimuth  $\lambda$  d'un côté  $JP$ , § 324 page 188 (*fig.* 120).

On a effectivement, en désignant par  $g'$ ,  $g''$  les coordonnées de  $G$ ;  $n'$ ,  $n''$  celles de  $N$ ; par  $az.GN$  l'inclinaison (droite-à-gauche) du côté  $GN$  sur l'axe  $OX$ , § 85 page 44 :

$$n' - g' = GN \sin az.GN, \quad n'' - g'' = GN \cos az.GN.$$

Or, l'azimuth de tout côté du canevas se déduit de l'azimuth choisi  $\lambda$  et des angles de triangles précédemment enregistrés § 351 : car, si  $az.JP = \lambda$ , l'azimuth d'un côté partant de  $J$  se formera en ajoutant à  $\lambda$  l'inclinaison (droite-à-gauche) du dit côté sur  $JP$ ; laquelle inclinaison résulte des angles du canevas qui ont leurs sommets en  $J$ , savoir :



$$\text{az. JH} = \lambda + \text{PJC} + \text{CJR} + \text{RJH}$$

$$\text{az. JG} = \lambda + \frac{1}{4}^d - \text{GJP}$$

de az. JG, on tire:  $\text{az. GJ} = \text{az. JG} + 2^d$

et  $\text{az. GN} = \text{az. GJ} + \frac{1}{4}^d - (\text{NGP} + \text{PGJ})$

on a aussi:  $\text{az. PJ} = \lambda + 2^d$

$$\text{az. PU} = \lambda + 2^d + \text{JPU}$$

et si, pour rattacher notre canevas à la triangulation de la carte de France, § 341 page 198, on rapporte au méridien de J l'azimuth de JP, dont l'amplitude  $\lambda$  sera alors  $28^s,020$ ; il viendra :

$$\text{az. JG} = 385,371$$

$$\text{az. JP} = 28^s,020$$

$$\text{az. GJ} = 185,371$$

$$\text{az. PJ} = 228,020$$

$$\text{az. GN} = 17,692$$

$$\text{az. PU} = 260,771$$

etc. .

etc...

on conclura ainsi, de proche-en-proche, les azimuths de tous les côtés; et l'on procédera au calcul des coordonnées par le type du § 360 page 224, où chaque point est comparé à ceux auxquels il a été trigonométriquement lié, § 345 page 205.

De sorte que, si l'on donne à E les coordonnées  $e' = 2000''$ ,  $e'' = 2000''$  qui font comprendre la plupart des sommets dans l'angle  $\text{vox}$ , § 324, on obtiendra d'abord les coordonnées horizontales de J, § 360, et, successivement, les coordonnées des autres points pour être inscrites au tableau ci-après § 362 page 227.

353. Cherchons, enfin, les coordonnées verticales du canevas: par application numérique des § 336, 337, 338; et en continuant l'exemple de la station P, à laquelle on peut rattacher verticalement les 14 points de mire A, B, C, E, F, G, J, K, L, N, Q, T, V et U (fig. 120) au moyen des inclinaisons zénithales  $\delta'$ ,  $\delta''$ ,  $\delta'''$ ,... observées sur ces points, § 347 page 207, avec l'éclimètre occupant l'une des places  $s'$ ,  $s''$ ... voisines de l'arbre P (fig. 131).

D'après le § 334 page 194, on pourra: 1.<sup>e</sup> commencer par transformer en inclinaison zénithale réelle, chaque inclinai-

son zénithale observée  $\delta$ , en retranchant de celle-ci la correction  $k = \left( \frac{D}{2400^m} \right)$  due aux influences terrestres et fournie par la table du § 356 page 217, pour calculer ensuite la vraie différence de niveau  $\frac{D}{\lg(\delta - k)}$ ; ou 2.<sup>e</sup> calculer  $\frac{D}{\lg \delta}$  et y ajouter la correction  $D \lg k = \left( \frac{D}{3960^m} \right)^2 \times 1^m$  aussi donnée par le § 356, afin d'avoir la vraie différence de niveau  $v - (s + i)$ . Le § 361 page 226, donne le type du calcul par l'un et l'autre procédés.

Quand l'inclinaison zénithale ne différera pas de 2 grades avec l'angle droit, il ne sera pas nécessaire d'employer les tables trigonométriques à ce calcul: car  $\frac{1}{\lg \delta}$  étant remplacé par  $\lg(1^d - \delta)$ , qui devient alors  $\left( \frac{1^d - \delta}{1} \right) \lg 1$  ou  $\left( \frac{1^d - \delta}{1} \right) \frac{1}{6364}$ , § 54 page 25, le terme  $\frac{D}{\lg \delta}$  se transformera en  $\frac{D(10000 - \delta)}{3664}$ , aussi promptement calculable avec les nombres simples qu'en employant les logarithmes.

Si l'inclinaison zénithale diffère de plus d'un grade avec l'angle droit, il sera toujours assez exact d'employer les quintuples-tangentes du § 309 page 180: en écrivant alors  $\frac{5D}{5 \lg \delta}$  au lieu de  $\frac{D}{\lg \delta}$ .

Chaque station géodésique produira les différences de niveau des points de mire qui y correspondent § 336, et il suffira d'attribuer, à la verticale de l'un des sommets du canevas, une valeur qui en fixe l'origine, § 326 page 189, pour obtenir les autres coordonnées verticales, qui, ayant été rattachées à plusieurs stations, concourront à des moyennes finales.

C'est ainsi qu'en donnant, à l'extrémité E. du clocheton-est de l'Ecole, la coordonnée verticale 155 mètres, qui, dans la triangulation de la Carte de France, rapporte ce point au

niveau de l'Océan : on aura les coordonnées  $z$  des autres points de mire, que l'on écrira en regard des coordonnées horizontales  $x$  et  $y$  des mêmes points, § 362 page 227.

354. Les huit rectangles de  $2000^m$  sur  $1500^m$ , dont nous avons voulu composer notre Levé, § 342, 345, ayant été représentés et numérotés sur le canevas provisoire (*fig.* 120), les feuilles correspondantes, au  $\frac{1}{5000}$ , auront un cadre de  $0^m,4$  sur  $0^m,3$ ; et, en donnant  $0^m,1$  de marge à ce cadre, il sera facile de désigner les numéros des feuilles auxquelles chaque sommet appartiendra.

Ainsi, le point  $L$ , qui a pour coordonnées horizontales  $x = 1847^m.1$ ,  $y = 4283^m.7$ , sera dans la 1.<sup>re</sup> zone parallèle à l'axe  $ox$  et sur la marge de la 2.<sup>e</sup> zone, tandis qu'il se trouvera dans la 3.<sup>e</sup> zone parallèle à  $ox$  et sur la marge de la 4.<sup>e</sup>; ce point pourra donc être placé sur quatre feuilles dont on écrira les numéros 5, 6, 7, 8 à côté de la désignation  $L$ , en soulignant le n.<sup>o</sup> 5 du cadre qui le comprend.

Et, après avoir étiqueté tous les sommets du tableau § 362, page 227, on relèvera ceux qui appartiennent à la même feuille, pour en faire un bulletin particulier, auquel il sera souvent utile de joindre les équations des alignements remarquables qui traversent la feuille, afin de suppléer au petit nombre de points trigonométriques échus à cette feuille.

Or, l'alignement passant par les points  $b$  et  $u$ , dont les coordonnées sont  $b'$ ,  $b''$  et  $u'$ ,  $u''$ , a pour équation :

$$\frac{x - b'}{y - b''} = \frac{u' - b'}{u'' - b''}$$

et cette droite rencontre la parallèle  $y = y'$  à l'axe des  $x$ , en un point dont l' $x = b' + (y' - b'') \frac{u' - b'}{u'' - b''}$ ; tandis que la même droite rencontre le parallèle  $x = x'$  à l'axe des  $y$ , en un point dont l' $y = b'' + (x' - b') \frac{u'' - b''}{u' - b'}$ .

355. En dernier résultat, notre canevas aura fourni les points, et les alignements suivants, aux huit feuilles qui doivent composer la carte des environs de Saint-Cyr :

1.<sup>re</sup> feuille A, E, H, J et alignement NG (fig. 120).

2.<sup>e</sup> . . . . A, E, H, J, R

3.<sup>e</sup> . . . . A, E, G, J, Q, U. . . . NG

4.<sup>e</sup> . . . . A, C, E, F, J, Q, T. . . . VF

5.<sup>e</sup> . . . . G, K, L. . . . . BU

6.<sup>e</sup> . . . . F, L, P, T, Y

7.<sup>e</sup> . . . . B, K, L, N. . . . . BU

8.<sup>e</sup> . . . . L, N, P, V. . . . . VB, PB.

Et chaque feuille aura un bulletin trigonométrique de la forme :

5.<sup>e</sup> FEUILLE au  $\frac{1}{5000}$ , encadrée par  $\left\{ \begin{array}{l} x = 0^m. \quad x' = 2000^m. \\ y = 3000. \quad y' = 4500. \end{array} \right.$

| DÉSIGNATION DES SOMMETS.                                                                                                                       | X                 | Y                 | Z                |                  |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|-------------------|------------------|------------------|
|                                                                                                                                                |                   |                   | mire.            | sol.             |
| G Arbre de la Grille Royale ( <i>drapeau</i> ). .                                                                                              | 1128 <sup>m</sup> | 3558 <sup>m</sup> | 131 <sup>m</sup> | 117 <sup>m</sup> |
| K Pignon-sud de Grange-Moulineaux. .                                                                                                           | 1370 <sup>m</sup> | 4387              | ..               | ..               |
| L Extrémité-sud du plus haut faite de la Faisanderie-Moulineaux. . . . .                                                                       | 1847              | 4289              | 120              | ..               |
| L'alignement BU, du clocher de Bailly et du pignon-sud de la Ménagierie, a pour équation $\frac{X - 1002^m}{Y - 6590^m} = \frac{1157}{4572}$ . |                   |                   |                  |                  |
| Il rencontre $Y = 3000^m$ en $X = 52^m$<br>et $Y = 4500^m$ en $X = 818^m$ .                                                                    |                   |                   |                  |                  |

356. TABLE des corrections qui ramènent au niveau vrai : les inclinaisons zénithales observées, et les différences de niveau apparent; § 335 page 194, et § 353 page 213.

| du $\frac{1}{100}$ au $\frac{1}{1000}$ |                             |                     | du $\frac{1}{1000}$ au $\frac{1}{10000}$ |                             |                    | du $\frac{1}{10000}$ au $\frac{1}{20000}$ |                             |                   |
|----------------------------------------|-----------------------------|---------------------|------------------------------------------|-----------------------------|--------------------|-------------------------------------------|-----------------------------|-------------------|
| Distances<br>horizon-<br>tales.        | Corrections<br>+<br>angles. | —<br>longueur.      | Distances<br>horizon-<br>tales.          | Corrections<br>+<br>angles. | —<br>longueur.     | Distances<br>horizon-<br>tales.           | Corrections<br>+<br>angles. | —<br>longueur.    |
| 400 <sup>m</sup>                       | 0'.1                        | 0 <sup>m</sup> .010 | 1400 <sup>m</sup>                        | 0'.6                        | 0 <sup>m</sup> .13 | 4000 <sup>m</sup>                         | 1'.6                        | 1 <sup>m</sup> .1 |
| 500                                    | 0.2                         | 0.017               | 1600                                     | 0.7                         | 0.17               | 5000                                      | 2.1                         | 1.7               |
| 600                                    | 0.2                         | 0.024               | 1800                                     | 0.7                         | 0.21               | 6000                                      | 2.5                         | 2.4               |
| 700                                    | 0.3                         | 0.032               | 2000                                     | 0.8                         | 0.26               | 7000                                      | 2.9                         | 3.2               |
| 800                                    | 0.3                         | 0.042               | 2200                                     | 0.9                         | 0.32               | 8000                                      | 3.3                         | 4.2               |
| 900                                    | 0.3                         | 0.053               | 2400                                     | 1.0                         | 0.38               | 9000                                      | 3.8                         | 5.3               |
| 1000                                   | 0.4                         | 0.066               | 2800                                     | 1.2                         | 0.52               | 10000                                     | 4.1                         | 6.6               |
| 1100                                   | 0.4                         | 0.080               | 3200                                     | 1.3                         | 0.67               | 11000                                     | 4.5                         | 8.0               |
| 1200                                   | 0.5                         | 0.094               | 3600                                     | 1.5                         | 0.86               | 12000                                     | 5.0                         | 9.4               |

357. Registre d'observations géodésiques; § 348 page 208.

IV.<sup>e</sup> Station à l'ARBRE DE PONTALY. . . . P

1<sup>er</sup> Angle  $\left\{ \begin{array}{l} d \text{ Signal} \dots\dots\dots J \\ g \text{ la Ménagerie} \dots\dots\dots U' \end{array} \right.$

En s', le 21 Avril 1840.

On<sup>o</sup> pointe sur le drapeau du Signal  
et, sur l'extrémité-sud du plus haut faite.

Le limbe est numéroté de droite à gauche.

| <i>n</i>  | <i>nS</i>            | <i>S</i>             | <i>n</i> | <i>nΔ</i>             | <i>Δ</i>             |
|-----------|----------------------|----------------------|----------|-----------------------|----------------------|
| 2         | 65 <sup>8</sup> .625 | 32 <sup>8</sup> .812 |          | sur J                 |                      |
| 4         | 131.225              | .. 806               | 2        | 197 <sup>8</sup> .075 | 98 <sup>8</sup> .558 |
| 6         | 196.850              | ... 8                | 4        | 394.175               | ... 44               |
| 8         | 262.475              | ... 9                | 6        | 591.275               | ... ..               |
| 10        | 328.075              | ... 7                | 8        | 788.375               | ... ..               |
| 12        | 393.675              | ... ..               |          | sur U                 |                      |
| <i>b'</i> | .....                | index.               |          | <i>nδ</i>             | <i>δ</i>             |
| <i>a'</i> | 824.825              |                      | 2        | 199.550               | 99.775               |
|           | + 852.900            |                      | 4        | 399.000               | ... 50               |
| <i>a</i>  | - 296.775            |                      | 6        | 598.575               | ... 63               |
|           | 656.125              |                      | 8        | 798.050               | ... ..               |

$$10S = 328^8.062 \quad 328.806 = S$$

$$i = 73. \dots \quad 145 \dots = y$$

$$178 \dots = S + y$$

EXCENTRICITÉS  $\left\{ \begin{array}{l} \text{horizontale} \dots r = 1^m.83 \\ \text{vertic.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{supér. } i = 1.25 \\ \text{infér. } I = 14.75 \end{array} \right. \end{array} \right.$

358. Transformation d'un angle observé en angle du canevas, § 349 page 209, par la formule :

$$\frac{C-S}{1'} = \left\{ \begin{aligned} & \left( 10000 - \frac{\Delta + \delta}{2} \right)^2 \operatorname{tg} \frac{s}{2} \sin 1' - \left( \frac{\Delta - \delta}{2} \right)^2 \operatorname{tg} \frac{s}{2} \sin 1' \\ & + \frac{r \sin (s+y)}{d \sin 1'} - \frac{r \sin y}{g \sin 1'} \end{aligned} \right\}$$

#### IV.<sup>e</sup> Station à l'arbre P.

1.<sup>er</sup> angle observé JPU = S = 32<sup>s</sup>.806, § 357.

$$\Delta' = 9854'.4$$

$$y = 145.$$

$$\delta' = 9976.3$$

$$S + y = 178.$$

$$p = 10000 - \frac{\Delta + \delta}{2} = 85$$

$$PJ = d = 2800^m.$$

$$q = \frac{\Delta - \delta}{2} = \dots \dots 61$$

$$PU = g = 3600.$$

estimés  
sur  
le canevas  
provisoire.

$$\frac{s}{2} = 16'.$$

$$r = \dots 1'.85''$$

$$\sin 1' = \frac{1}{6364}, \text{ § 54 page 25.}$$

$$1. \sin 1' = 6.196$$

$$1. \sin 1' = 6.196$$

$$2. l. p = 3.848$$

$$2. l. q = 3.570$$

$$1. \operatorname{tg} \frac{s}{2} = 9.420$$

$$1. \cot \frac{s}{2} = 0.580 = \operatorname{cl.} \operatorname{tg} \frac{s}{2}$$

$$\underline{9.464}$$

$$\underline{0.646}$$

$$1.^{\text{er}} \text{ terme} = + 0,3$$

$$- 2,2 = 2.^{\text{e}} \text{ terme.}$$

$$\operatorname{cl.} \sin 1' = 3.804$$

$$\operatorname{cl.} \sin 1' = 3.804$$

$$\operatorname{cl.} d = 6.544$$

$$\operatorname{cl.} g = 6.748$$

$$1. r = 0.262$$

$$1. r = 0.262$$

$$1. \sin (s+y) = 9.559 +$$

$$1. \sin y = 9.886 +$$

$$\underline{0.149}$$

$$\underline{0.700}$$

$$3.^{\text{e}} \text{ terme} = + 1,4$$

$$- 5,0 = 4.^{\text{e}} \text{ terme.}$$

$$+ 1,7 - 7,2 = - 5,5 = \frac{C-S}{1'}$$

$$\underline{32^s.806} = S$$

$$32^s.754 = \text{angle } C \text{ du canevas.}$$

## 359. Calcul des triangles formant le canevas

| ORDRE<br>ET DÉSIGNATION<br>DES TRIANGLES. | ANGLES DÉFINITIFS | CALCUL DES RAPPORTS DES CÔTÉS.                             |                                                          |  | CALCUL DES CÔTÉS.                                  |        | Renvoi aux<br>n <sup>os</sup> des<br>triangles. |
|-------------------------------------------|-------------------|------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|--|----------------------------------------------------|--------|-------------------------------------------------|
|                                           |                   | cl. sin = 0.20573<br>l. sin = 9.99999<br>l. sin = 9.89466. | $l. \frac{p}{c} = 0.20572$<br>$l. \frac{v}{c} = 0.10059$ |  | l. c = 3.16845<br>l. p = 3.37417<br>l. v = 3.26884 | base.  |                                                 |
| 1<br>G<br>P<br>V                          | 424.793           | cl. sin = 0.13732<br>l. sin = 9.99975<br>l. sin = 9.85042  | $l. \frac{p}{g} = 0.13707$<br>$l. \frac{c}{g} = 9.98774$ |  | l. g = 3.26884<br>l. p = 3.40591<br>l. c = 3.25658 | 1      |                                                 |
|                                           | 51.998            |                                                            |                                                          |  |                                                    |        |                                                 |
|                                           | 97.864            |                                                            |                                                          |  |                                                    |        |                                                 |
| 2<br>G<br>P<br>C                          | 50.138            |                                                            |                                                          |  |                                                    |        |                                                 |
|                                           | 42.649            | cl. sin = 0.20695<br>l. sin = 9.99208<br>l. sin = 9.81460  | $l. \frac{g}{j} = 0.19903$<br>$l. \frac{p}{j} = 0.02155$ |  | l. j = 3.25658<br>l. g = 3.45561<br>l. p = 3.27813 | 2<br>4 |                                                 |
|                                           | 112.117           |                                                            |                                                          |  |                                                    |        |                                                 |
| 3<br>J<br>G<br>P                          | 45.234            |                                                            |                                                          |  |                                                    |        |                                                 |
|                                           | 44.983            | cl. sin = 0.18764<br>l. sin = 9.86664<br>l. sin = 9.99969  | $l. \frac{p}{j} = 0.05428$<br>$l. \frac{c}{j} = 0.18753$ |  | l. j = 3.26884<br>l. p = 3.33112<br>l. c = 3.45617 | 1<br>3 |                                                 |
|                                           | 52.619            |                                                            |                                                          |  |                                                    |        |                                                 |
| 4<br>J<br>P<br>C                          | 402.398           |                                                            |                                                          |  |                                                    |        |                                                 |
|                                           | 83.214            | cl. sin = 0.30245<br>l. sin = 9.96599<br>l. sin = 9.99625  | $l. \frac{p}{n} = 0.26844$<br>$l. \frac{v}{n} = 0.29870$ |  | l. n = 3.16845<br>l. v = 3.43689<br>l. p = 3.46715 | 1<br>6 |                                                 |
|                                           | 75.135            |                                                            |                                                          |  |                                                    |        |                                                 |
| 5<br>N<br>V<br>P                          | 91.651            |                                                            |                                                          |  |                                                    |        |                                                 |
|                                           | 33.777            | cl. sin = 0.29584<br>l. sin = 9.99588<br>l. sin = 9.88128  | $l. \frac{p}{n} = 0.28972$<br>$l. \frac{g}{n} = 0.18012$ |  | l. n = 3.25658<br>l. p = 3.54650<br>l. g = 3.43670 | 2<br>3 |                                                 |
|                                           | 110.661           |                                                            |                                                          |  |                                                    |        |                                                 |
| 6<br>N<br>P<br>G                          | 55.562            |                                                            |                                                          |  |                                                    |        |                                                 |
|                                           |                   |                                                            |                                                          |  |                                                    |        |                                                 |
|                                           |                   |                                                            |                                                          |  |                                                    |        |                                                 |



des environs de Saint-Cyr, § 351 page 210.

|    |         |         |                            |                            |                  |                           |    |
|----|---------|---------|----------------------------|----------------------------|------------------|---------------------------|----|
| 7  | $\beta$ | 257.818 | $\text{cl. sin} = 0.40394$ | $\frac{v}{b} = 0.29124$    | $l. b = 3.16845$ | PV = . . . . .            | 1  |
|    | V       | 56.631  | $l. \sin = 9.89050$        | $l. \frac{v}{b} = 0.58722$ | $l. v = 3.46269$ | PB = 2902 <sup>m</sup> .0 | 8  |
|    | P       | 117.551 | $l. \sin = 9.98328$        |                            | $l. p = 3.55507$ | BV = 3594.8               |    |
| 8  | B       | 39.275  | $\text{cl. sid} = 0.25768$ | $l. \frac{p}{b} = 0.27520$ | $l. b = 3.25658$ | PG = . . . . .            | 2  |
|    | P       | 84.815  | $l. \sin = 9.98752$        | $l. \frac{g}{p} = 0.20581$ | $l. p = 3.48178$ | BG = 3052.4               |    |
|    | G       | 75.910  | $l. \sin = 9.96813$        |                            | $l. g = 3.46239$ | PB = 2900.0               | 7  |
| 9  | F       | 70.062  | $\text{cl. sid} = 0.04991$ | $l. \frac{p}{f} = 0.04478$ | $l. f = 3.16845$ | PV = . . . . .            | 1  |
|    | P       | 90.232  | $l. \sin = 9.99187$        | $l. \frac{v}{f} = 9.81655$ | $l. p = 3.21523$ | FV = 1653.9               |    |
|    | V       | 39.706  | $l. \sin = 9.76644$        |                            | $l. v = 3.98480$ | FP = 965.6                | 10 |
| 10 | F       | 03.003  | $\text{cl. sin} = 0.07789$ | $l. \frac{g}{f} = 9.72881$ | $l. f = 3.25658$ | PG = . . . . .            | 2  |
|    | G       | 29.547  | $l. \sin = 9.65092$        | $l. \frac{p}{f} = 0.07491$ | $l. g = 3.98539$ | FP = 966.9                | 9  |
|    | P       | 107.450 | $l. \sin = 9.99702$        |                            | $l. p = 3.35149$ | FG = 2145.3               |    |
| 11 | T       | 50.684  | $\text{cl. sin} = 0.14590$ | $l. \frac{p}{t} = 0.08573$ | $l. t = 3.16845$ | PV = . . . . .            | 1  |
|    | P       | 66.743  | $l. \sin = 9.93783$        | $l. \frac{v}{t} = 0.12942$ | $l. p = 3.23218$ | TV = 1787.3               |    |
|    | V       | 82.575  | $l. \sin = 9.98352$        |                            | $l. v = 3.29787$ | TP = 1985.5               | 12 |
| 12 | T       | 32.764  | $\text{cl. sin} = 0.30788$ | $l. \frac{g}{t} = 0.04064$ | $l. t = 3.25658$ | PG = . . . . .            | 2  |
|    | G       | 36.358  | $l. \sin = 9.73276$        | $l. \frac{p}{t} = 0.25165$ | $l. g = 3.29722$ | TP = 1983.6               | 11 |
|    | P       | 130.978 | $l. \sin = 9.94677$        |                            | $l. p = 3.51123$ | TG = 3245.1               |    |

Suite du calcul des triangles formant

| ORDRE<br>ET DÉSIGNATION<br>DES TRIANGLES. | ANGLES DÉFINITIFS. | CALCUL DES RAPPORTS DES CÔTÉS. |                           |                                    | CALCUL DES CÔTÉS.        |                           | Renvoy aux<br>nos des<br>triangles. |
|-------------------------------------------|--------------------|--------------------------------|---------------------------|------------------------------------|--------------------------|---------------------------|-------------------------------------|
| 13                                        | A                  | 604.118                        | cl. sin = 0.09146         | $\text{l. } \frac{j}{a} = 0.07692$ | $\text{l. } a = 3.27813$ | JG = . . . .              | 3                                   |
|                                           | J                  | 116.584                        | $\text{l. sin} = 9.98546$ | $\text{l. } \frac{g}{a} = 0.16369$ | $\text{l. } j = 3.35505$ | AG = 2264 <sup>m</sup> .9 | 14                                  |
|                                           | G                  | 23.498                         | $\text{l. sin} = 9.55724$ | $\text{l. } \frac{p}{a} = 0.09858$ | $\text{l. } g = 2.92683$ | AJ = 845.0                |                                     |
| 14                                        | A                  | 47.167                         | cl. sin = 0.17023         | $\text{l. } \frac{g}{a} = 0.16369$ | $\text{l. } a = 3.25658$ | PG = . . . .              | 2                                   |
|                                           | G                  | 88.567                         | $\text{l. sin} = 9.99296$ | $\text{l. } \frac{p}{a} = 0.09858$ | $\text{l. } g = 3.42027$ | AP = 2631.9               |                                     |
|                                           | P                  | 64.266                         | $\text{l. sin} = 9.92765$ |                                    | $\text{l. } p = 3.35496$ | AG = 2264.4               | 15                                  |
| 15                                        | E                  | 104.508                        | cl. sin = 0.00110         | $\text{l. } \frac{j}{a} = 9.97369$ | $\text{l. } e = 3.27813$ | JG = . . . .              | 3                                   |
|                                           | J                  | 77.622                         | $\text{l. sin} = 9.97259$ | $\text{l. } \frac{e}{c} = 9.44362$ | $\text{l. } j = 3.25182$ | GE = 1785.8               | 16                                  |
|                                           | G                  | 17.870                         | $\text{l. sin} = 9.44257$ |                                    | $\text{l. } g = 2.72175$ | JE = 527.0                |                                     |
| 16                                        | E                  | 53.282                         | cl. sin = 0.12926         | $\text{l. } \frac{e}{c} = 0.12747$ | $\text{l. } e = 3.25658$ | PG = . . . .              | 2                                   |
|                                           | G                  | 94.221                         | $\text{l. sin} = 9.99821$ | $\text{l. } \frac{p}{c} = 9.99512$ | $\text{l. } g = 3.38405$ | PE = 2421.2               |                                     |
|                                           | P                  | 52.497                         | $\text{l. sin} = 9.86586$ |                                    | $\text{l. } p = 3.25170$ | GE = 1785.5               | 15                                  |
| 17                                        | K                  | 91.287                         | cl. sin = 0.00308         | $\text{l. } \frac{p}{k} = 9.97194$ | $\text{l. } k = 3.45589$ | PJ = . . . .              | 3, 4                                |
|                                           | P                  | 76.181                         | $\text{l. sin} = 9.96886$ | $\text{l. } \frac{j}{b} = 9.69344$ | $\text{l. } p = 3.42783$ | KJ = 2678 <sup>m</sup> .1 |                                     |
|                                           | J                  | 32.532                         | $\text{l. sin} = 9.68536$ |                                    | $\text{l. } j = 3.14853$ | PK = 1407.1               | 18                                  |
| 18                                        | K                  | 413.950                        | cl. sin = 0.01051         | $\text{l. } \frac{p}{k} = 9.67965$ | $\text{l. } k = 3.25658$ | PG = . . . .              | 2                                   |
|                                           | P                  | 30.913                         | $\text{l. sin} = 9.66914$ | $\text{l. } \frac{p}{h} = 9.89255$ | $\text{l. } p = 2.93625$ | GK = 862.7                |                                     |
|                                           | G                  | 55.137                         | $\text{l. sin} = 9.83184$ |                                    | $\text{l. } q = 3.14893$ | PK = 1407.7               | 17                                  |

le canevas des environs de Saint-Cyr.

|    |    |         |                     |                            |                  |              |      |
|----|----|---------|---------------------|----------------------------|------------------|--------------|------|
| 19 | L. | 107.387 | cl. sin = 0.00294   | $l. \frac{p}{q} = 9.5557$  | $l. l = 3.41589$ | PJ = . . . . | 3, 4 |
|    | P  | 71.650  | $l. \sin = 9.5545$  | $l. \frac{p}{q} = 9.5557$  | $l. p = 3.41426$ | JL = 3592.7  |      |
|    | J  | 20.965  | $l. \sin = 9.5966$  | $l. \frac{j}{l} = 9.51260$ | $l. j = 2.96849$ | PL = 950.0   | 20   |
| 20 | L. | 449.809 | cl. sin = 0.14925   |                            | $l. l = 3.25658$ | PG = . . . . | 2    |
|    | P  | 26.592  | $l. \sin = 9.60508$ | $l. \frac{p}{l} = 9.75431$ | $l. p = 3.01089$ | GL = 1025.4  |      |
|    | G  | 25.799  | $l. \sin = 9.56253$ | $l. \frac{g}{l} = 9.71176$ | $l. g = 2.96834$ | PL = 929.7   | 19   |
| 21 | Q  | 56.521  | cl. sin = 0.17031   |                            | $l. q = 3.25658$ | PG = . . . . | 2    |
|    | G  | 105.220 | $l. \sin = 9.99944$ | $l. \frac{g}{q} = 0.10975$ | $l. g = 3.36633$ | PQ = 2524.5  |      |
|    | P  | 40.259  | $l. \sin = 7.77163$ | $l. \frac{p}{q} = 9.81191$ | $l. p = 3.13852$ | GQ = 1375.8  |      |
| 22 | U  | 57.561  | cl. sin = 0.10463   |                            | $l. u = 3.45689$ | PJ = . . . . | 3, 4 |
|    | P  | 32.751  | $l. \sin = 9.69200$ | $l. \frac{p}{u} = 9.79663$ | $l. p = 3.25252$ | JU = 1788.6  |      |
|    | J  | 109.688 | $l. \sin = 9.99495$ | $l. \frac{j}{u} = 9.09958$ | $l. j = 3.55547$ | PJ = 3593.0  |      |
| 23 | R  | 50.161  | cl. sin = 0.14942   |                            | $l. r = 3.35512$ | JC = . . . . | 4    |
|    | J  | 57.706  | $l. \sin = 9.89613$ | $l. \frac{j}{r} = 0.04555$ | $l. j = 3.56867$ | RC = 2537.1  |      |
|    | C  | 92.133  | $l. \sin = 9.99682$ | $l. \frac{c}{r} = 0.14624$ | $l. c = 3.46936$ | RJ = 2946.8  |      |
| 24 | H  | 99.152  | cl. sin = 0.00004   |                            | $l. h = 3.46936$ | JR = . . . . | 23   |
|    | J  | 56.764  | $l. \sin = 9.89100$ | $l. \frac{j}{h} = 9.89104$ | $l. j = 3.56040$ | HR = 2293.0  |      |
|    | R  | 44.084  | $l. \sin = 9.80510$ | $l. \frac{r}{h} = 9.80514$ | $l. r = 3.27450$ | HJ = 1831.5  |      |

360. Calcul des coordonnées horizontales du canevas des environs de Saint-Cyr, § 352 page 212.

| POINTS.                    | Références.                         | AZIMUTHS<br>(de droite à gauche)<br>DE RP. | X<br><br>par $X \rightarrow x' = D \sin \lambda$ .                                                                                                                                                                                       | Y<br><br>par $Y \rightarrow y' = D \cos \lambda$ .                                                                                                                                                      |
|----------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| J<br>jalon isolé.          | E<br>clocher 100-est<br>de l'École. | 263°.013                                   | $2.72175 = \log \frac{D}{1^m} \dots 15.^e \text{ triangle.}$ $9.92216 = \log \sin \lambda -$ $\frac{2.64591}{2.64591} - 440.^e .5 \left. \vphantom{\begin{matrix} 9.92216 \\ 2.64591 \end{matrix}} \right\} 4550^m.5$ $x' = 2000^m.5$    | $2.72175 = \log \frac{D}{1^m}$ $9.75951 = \log \cos \lambda -$ $\frac{2.46116}{2.46116} - 289.^e .2 \left. \vphantom{\begin{matrix} 9.75951 \\ 2.46116 \end{matrix}} \right\} 4710^m.8$ $y' = 2000^m.2$ |
| P<br>arbre de<br>Pontally. | J                                   | 287°.040                                   | $3.45589 = L. D. \dots 3.^e \text{ et } 4.^e \text{ triangles.}$ $9.62976 = L. \sin \lambda +$ $\frac{3.08563}{3.08563} + 1218.^e .0 \left. \vphantom{\begin{matrix} 9.62976 \\ 3.08563 \end{matrix}} \right\} 2777^m.5$ $x' = 1559^m.5$ | $3.45589 = L. D$ $9.45645 = L. \cos \lambda +$ $\frac{3.41252}{3.41252} + 2584.^e .2 \left. \vphantom{\begin{matrix} 9.45645 \\ 3.41252 \end{matrix}} \right\} 4298^m.0$ $y' = 1710^m.8$                |
|                            | E                                   | 204°.804                                   | $3.38405 = L. D. \dots 16.^e \text{ triangle.}$ $9.50650 = L. \sin \lambda +$ $\frac{2.89055}{2.89055} + 777.^e .2 \left. \vphantom{\begin{matrix} 9.50650 \\ 2.89055 \end{matrix}} \right\} 2777^m.2$ $x' = 2000^m.2$                   | $3.38405 = L. D$ $9.97638 = L. \cos \lambda +$ $\frac{3.36043}{3.36043} + 2293.^e .1 \left. \vphantom{\begin{matrix} 9.97638 \\ 3.36043 \end{matrix}} \right\} 4298^m.4$ $y' = 2000^m.1$                |

|                                                                 |   |          |                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                           |
|-----------------------------------------------------------------|---|----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| G<br>arbre<br>de la Grille<br>royale,                           | P | 275°.298 | $\begin{array}{r} 3.25658 = \text{L. D.} \dots 2^{\circ} \text{ triangle.} \\ 9.96062 = \text{L. sin } \lambda - \\ \hline 3.21720 - 1618^{\circ} 9 \} 4128^{\circ} .4 \\ \alpha' = 2777^{\circ} 3 \end{array}$                      | $\begin{array}{r} 3.25658 = \text{L. D} \\ 9.60986 = \text{L. cos } \lambda - \\ \hline 2.86644 - 735^{\circ} .8 \} 3558^{\circ} .7 \\ y' = 4294^{\circ} 0 \end{array}$   |
|                                                                 | E | 367°.526 | $\begin{array}{r} 3.25182 = \text{L. D.} \dots 15^{\circ} \text{ et } 16^{\circ} \text{ triang.} \\ 9.68867 = \text{L. sin } \lambda - \\ \hline 2.94649 - 870^{\circ} 9 \} 4128^{\circ} .4 \\ \alpha' = 2000^{\circ} . \end{array}$ | $\begin{array}{r} 3.25182 = \text{L. D} \\ 9.94085 = \text{L. cos } \lambda + \\ \hline 3.19267 + 1558^{\circ} .4 \} 3038^{\circ} .4 \\ y' = 2000^{\circ} 0 \end{array}$  |
|                                                                 | J | 385°.371 | $\begin{array}{r} 3.27813 = \text{L. D.} \dots 3^{\circ} \text{ triangle.} \\ 9.35751 = \text{L. sin } \lambda - \\ \hline 2.63564 - 432^{\circ} .2 \} 4127^{\circ} .3 \\ \alpha' = 1559^{\circ} 5 \end{array}$                      | $\begin{array}{r} 3.27813 = \text{L. D} \\ 9.98843 = \text{L. cos } \lambda + \\ \hline 3.26656 + 1847^{\circ} .4 \} 3558^{\circ} .2 \\ y' = 1710^{\circ} .8 \end{array}$ |
|                                                                 | P | 260°.771 | $\begin{array}{r} 3.55547 = \text{L. D.} \dots 22^{\circ} \text{ triangle.} \\ 9.91173 = \text{L. sin } \lambda - \\ \hline 3.46720 - 2952^{\circ} .2 \} -154^{\circ} .9 \\ \alpha' = 2777^{\circ} 3 \end{array}$                    | $\begin{array}{r} 3.55547 = \text{L. D} \\ 9.76189 = \text{L. cos } \lambda - \\ \hline 3.31736 - 2076^{\circ} .6 \} 2217^{\circ} .4 \\ y' = 4294^{\circ} 0 \end{array}$  |
|                                                                 | J | 318°.338 | $\begin{array}{r} 3.25252 = \text{L. D.} \dots 22^{\circ} \text{ triangle.} \\ 9.98172 = \text{L. sin } \lambda - \\ \hline 3.23424 - 1714^{\circ} 9 \} -153^{\circ} .4 \\ \alpha' = 1559^{\circ} 5 \end{array}$                     | $\begin{array}{r} 3.25252 = \text{L. D} \\ 9.43355 = \text{L. cos } \lambda + \\ \hline 2.70605 + 508^{\circ} .2 \} 2219^{\circ} .0 \\ y' = 1710^{\circ} .8 \end{array}$  |
| U<br>extrémité-sud<br>du plus haut<br>faîte de la<br>Ménagerie. |   |          |                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                           |

## 361. Calcul des coordonnées verticales, § 353 page 213.

| 4.° STATION<br>à<br>l'arbre P<br>de Pontally.                                                                                                        | DIFFÉRENCES DE NIVEAU                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                        | VERTICALES<br>s et v.                                                             |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                                                                      | par<br>$v-(s+i)=\frac{D}{\operatorname{tg} \delta}+D \operatorname{tg} A'$                                                                                                                                                         | par<br>$v-(s+i)=\frac{D}{\operatorname{tg}(\delta-A')}$                                                                                |                                                                                   |
| sur E<br>clocheton-est<br>de l'École.<br><br>$\delta=98^{\circ}.990$<br>$A'=\dots$<br>$\delta-A'=\dots$<br>$PE=2420^m$<br>(16.° triangle).           | $3.38405=\log \frac{D}{1^m}$<br>$8.20048=\operatorname{cl.} \operatorname{tg} \delta +$<br>$1.58453 \quad + \quad 38.4$<br>$\S 356 \dots D \operatorname{tg} A' = + 0.4$<br>$\quad \quad \quad + 38.8$                             |                                                                                                                                        | $v-(s+i)=+38^m.8$<br>$v=\frac{155}{116.2}$<br>$s=\frac{116.2}{+1.2}$<br>$s=115.0$ |
| sur N<br>sommets du clo-<br>cher de Noisy.<br><br>$\delta=98^{\circ}.778$<br>$A'=\dots 12$<br>$\delta-A'=98.766$<br>$PN=2730^m$<br>(5.° et 6.° tri.) |                                                                                                                                                                                                                                    | $5D \quad 5 \operatorname{tg}(\delta-A')$<br>$13650 \left\{ \begin{array}{l} 258+\dots \S 309 \\ 750 \\ 234 \end{array} \right. +52.9$ | $v-(s+i)=+52^m.9$<br>$(s+i)=\frac{116.2}{v=169.4}$                                |
| sur U<br>pignon-sud de<br>la Ménagerie.<br><br>$\delta=99^{\circ}.765$<br>$A'=\dots$<br>$\delta-A'=\dots$<br>$PU=3590^m$<br>(22.° triangle).         | $3.55547=\log \frac{D}{1^m}$<br>$6.19627=\operatorname{cl.} 6364$<br>$1.37475=\log \left( \frac{1^d-\delta}{1^i} \right) +$<br>$1.12649 \quad + \quad 13.4$<br>$D \operatorname{tg} A' = + 0.9$<br>$\quad \quad \quad + 14.3$      |                                                                                                                                        | $v-(s+i)=+14^m.3$<br>$(s+i)=\frac{116.2}{v=130.5}$                                |
| sur V<br>pied de l'arbre<br>de Villepreux.<br><br>$\delta=100^{\circ}093$<br>$A'=\dots$<br>$\delta-A'=\dots$<br>$PV=1470^m$<br>(1.° triangle).       | $1470^m=D$<br>$-9.3=\left( \frac{1^d-\delta}{1^i} \right)$<br>$\frac{441.0}{1323}$<br>$-13671 \left\{ \begin{array}{l} 3664 \\ 2679 \end{array} \right. \quad -3.7$<br>$D \operatorname{tg} A' = + .1$<br>$\quad \quad \quad -3.6$ |                                                                                                                                        | $v-(s+i)=-3^m.6$<br>$(s+i)=\frac{116.2}{v=112.6}$                                 |

362. TABLEAU des Coordonnées du canevas des environs de Saint-Cyr, § 354 page 215.

| N. <sup>os</sup><br>des<br>FEUILLES. | DÉSIGNATION DES SOMMETS.                                                 | X                    | Y                    | Z                   |                     |
|--------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|----------------------|----------------------|---------------------|---------------------|
|                                      |                                                                          |                      |                      | points<br>de mire.  | sols.               |
| 1, 2, 3, 4                           | Auberge de la Boule-d'Or<br>(cheminée-ouest).                            | 2404 <sup>m</sup> .5 | 1687 <sup>m</sup> .4 | 177 <sup>m</sup> .6 | "                   |
| 7                                    | Bailly (clocher).                                                        | 1002 .3              | 6589 .7              | "                   | "                   |
| 4, 6                                 | C, arbre du bois de la Chiffe<br>(drapeau).                              | 3475 .7              | 2572 .7              | 186 .3              | 169 <sup>m</sup> .7 |
| 1, 2, 3, 4                           | École (clocheton-est).                                                   | 2000 .               | 2000 .               | 155 .               | 130.2               |
| 4, 6                                 | Fontenay (clocher).                                                      | 5270 .2              | 3464 .1              | 141 .6              | "                   |
| 3, 5                                 | G, arbre de la Grille royale<br>(drapeau).                               | 1128 .6              | 3558 .4              | 131 .3              | 116.5               |
| 1, 2                                 | Hameau de Bouviers (cheminée-est)                                        | 1914 .3              | —95 .3               | 171 .7              | "                   |
| 1, 2, 3, 4                           | Jalon isolé (drapeau).                                                   | 1559 .5              | 1710 .4              | 182 .3              | 172.                |
| 5, 7                                 | K, Moulineaux (cheminée).                                                | 1370 .2              | 4386 .8              | "                   | "                   |
| 5, 6, 7, 8                           | L, le plus haut faite de la Faisande.<br>rie-Moulineaux (extrémité-sud). | 1847 .1              | 4288 .7              | 120 .2              | "                   |
| 7, 8                                 | Noisy (clocher).                                                         | 2095 .3              | 6940 .2              | 169 .1              | "                   |
| 6, 8                                 | P, arbre de Pontally (drapeau).                                          | 2777 .3              | 4294 .1              | 131 .2              | 115.                |
| 3, 4                                 | Q, pavillon du garde-polygone<br>(cheminée).                             | 1624 .3              | 2274 .4              | 134 .5              | "                   |
| 2                                    | R, arbre de l'Étang - St. - Quentin<br>(drapeau).                        | 4166 .2              | 343 .9               | 175 .2              | 158.                |
| 4, 6                                 | Ternay (fronton-est).                                                    | 4338 .2              | 3067 .7              | "                   | "                   |
| 3                                    | U, le plus haut faite de la Ménas.<br>gerie (extrémité-sud).             | 2155 .1              | 2218 .2              | 150 .5              | "                   |
| 6, 8                                 | V, arbre de Villepreux (drapeau).                                        | 4144 .3              | 4843 .1              | 127 .3              | 112.6               |

## CHAPITRE II. : CANEVAS D'UNE FEUILLE TOPOGRAPHIQUE.

*Canevas horizontal.*

363. Une base étant placée sur une feuille ; on préparera cette feuille à recevoir les détails topographiques : en distribuant ceux-ci par groupes susceptibles d'être isolément rattachés à des stations, qui, elles-mêmes, puissent se coordonner à la base donnée, soit directement, soit au moyen de repères que l'étendue du levé rendra plus ou moins essentiels et nombreux.

Ainsi, la préparation complète d'une feuille topographique exigera un canevas horizontal et les cotes verticales de repères *principaux*, dont le choix sera facilité en parcourant préliminairement le terrain à lever, comme on l'a fait pour le canevas général, § 317 page 184.

364. On mesurera les angles du nouveau canevas, avec des goniomètres à tuyaux visuels plongeants ; et, au lieu de se borner à enregistrer les graduations des angles observés, on accomplira, sur le terrain même, les constructions qui se rapportent à chaque station, pour pouvoir en vérifier ou rectifier, aussitôt, les résultats : à cet effet, on tendra la feuille topographique sur une tablette portative *ats* (fig. 82), en collant les bords, ou en fixant deux de ces bords aux rouleaux *tt*, *ss* qui permettent de développer successivement toutes les parties de ladite feuille.

On tracera les angles obtenus numériquement : soit au moyen de leurs indices trigonométriques, soit par leurs cordes, note 1.<sup>re</sup> page 32A, dont on aura calculé des tables analogues à celle du § 309 page 180 ; et, le plus ordinairement, avec un rapporteur circulaire, auquel on donnera, dans chaque station, la déclinaison relative à un coup d'alidade particulier, § 223 page 128.

Mais, on abrégera beaucoup les constructions graphiques : en relevant les angles avec la planchette, sur la table de laquelle on aura tendu la feuille du canevas, qui recevra,



alors, la projection de chaque coup d'alidade en même temps qu'on le visera, § 226 page 130.

365. En supposant que  $ab$  représente graphiquement la base  $AB$  (fig. 21) regardée comme inaccessible, dans le cas le plus général § 73 page 36 : il faudra, d'abord, y rattacher une station  $z$ , d'où l'on puisse voir des objets propres à servir de repères.

Dans ce but, on recourra à une autre station  $u$ , qu'il sera avantageux de choisir sur un alignement  $gzc$ , *momentanément* reconnaissable par  $g$  et  $c$ , en employant, au besoin, le procédé du § 138 page 78; et l'on mesurera les angles  $zua$ ,  $zub$ , par les coups d'alidade  $uz$ ,  $ua$ ,  $ub$ , qu'on tracera aussitôt, sur une feuille auxiliaire, en  $u'z'$ ,  $u'a'$ ,  $u'b'$ . § 222 page 128 ou § 228 page 131. Venant, ensuite, à la station  $z$  provisoirement marquée en  $z'$ , on donnera les coups d'alidade  $zu$ ,  $za$ ,  $zb$  produisant les angles  $uza$  et  $uzb$ , qu'on appuiera sur  $z'u'$  en  $u'z'a'$  et  $u'z'b'$ , § 223 ou § 229. Et, pour coordonner graphiquement la station  $z$  à la base  $ab$ , on construira, sur cette base, un triangle semblable à  $a'b'z'$ : soit en passant par le triangle  $a'b''z''$  fait au moyen de  $a'b'' = ab$  et de  $b''z''$  tracée parallèlement à  $b'z'$ , § 230 page 131; soit en recourant à l'angle de transformation  $b'a'y'$  obtenu en décrivant, avec le rayon  $a'b'$ , l'arc  $a'y$  sous-tendu par la longueur  $ab$  homologue à  $a'b'$ , § 115, et, à l'aide duquel angle, un côté  $a'z'$  du triangle  $a'b'z'$ , étant porté en  $a'x$  et  $a'x'$ , se transformera en  $xx'$  pour appartenir au triangle semblable qui doit être fait sur  $ab$ .

Le triangle  $uab$ , semblable à  $u'a'b'$ , placera graphiquement le point auxiliaire  $u$ , et la direction  $uz$  vérifiera angle  $uzb = uzb$  et angle  $uza = uza$ .

366. La station  $z$  devient, alors, centre d'un tour-d'horizon qu'on appuiera au côté  $zb$ , homologue à la *plus grande* des distances qui viennent d'être marquées, § 223 ou § 229, pour tracer ensuite, par  $z$ , les coups d'alidade sur des objets destinés à servir de repères.

Puis, on se transportera sur l'un de ces derniers aligne-

ments, en un lieu  $v$  (fig. 21) d'où l'on voit, sous un angle convenable § 84, les repères  $a$  et  $b$  auxquels on rattachera cette nouvelle station : soit en mesurant l'angle  $zvb$  qu'on appuiera sur  $z$ , § 72 page 36; soit en coupant la direction  $zv$  par l'arc capable de l'angle  $avb$ , § 76 page 38. Et ce point  $v$ , devenant lui-même centre d'un tour-d'horizon appuyé sur  $eb$  ou sur  $va$ , fournira, par ses coups d'alidade, la position graphique de quelques uns des objets rayonnés dans le tour-d'horizon précédent, ainsi que les directions sur de nouveaux points de mire.

Parvenu, de cette manière, à coordonner graphiquement plusieurs repères à la base donnée; on choisira d'autres centres de rayonnement, qui, déterminés par trois de ces repères § 77 page 39, feront construire, de proche-en-proche dans l'étendue de la feuille topographique, les projections de points de mire, qu'on signalera dans une légende.

Et si, à la première station  $u$ , on avait tracé, sur la feuille auxiliaire, le tour-d'horizon  $u'a'$ ,  $u'b'$ ,  $u'x'$ ,  $u'v'$ ,... formé par les directions  $ua$ ,  $ub$ ,  $uz$ ,  $uv$ ... (fig. 21), il suffirait de décalquer ce tour-d'horizon, sur l'appui  $ua$  homologue à  $ua$ , pour avoir des alignements, dont quelques uns, coupés par ceux du tour-d'horizon fait en  $z$ , détermineraient aussitôt les points communs aux observations en  $u$  et en  $z$ .

On s'assure du lieu graphique d'un point de mire : en le recoupant d'une troisième station, qui rattache ce point à deux bases, § 322 page 187; cependant, on pourra négliger cette vérification, quand ledit point aura été bien signalé et coupé sur un angle convenable, § 84.

367. Le § 77 bis, compris dans la note 3.<sup>e</sup> page 32c, ayant fait voir que la description simultanée des arcs capables  $rv'v''$ ,  $rr'r''$  (fig. 25) conduisait promptement à la position graphique du lieu  $z$ , où l'on a observé les angles  $dza$ ,  $azg$  sur les trois points  $d, a, g$  projetés en  $d, a, g$ ; il faudra employer ce mode de construction pour déterminer graphiquement une station au moyen de trois repères.

Or, si on a relevé les angles  $dza$ ,  $azg$  avec un gonio-

mètre numérique, le rapporteur servira à décrire les arcs capables, de la manière suivante :

En désignant par  $d'$ ,  $a'$ ,  $g'$  les graduations des coups d'alidade donnés, en  $z$ , sur les repères  $D, A, G$  (fig. 25); les angles  $DZA$  et  $AZG$  auront pour amplitudes :  $(d' - a')$  et  $(a' - g')$  ou  $[(d' + x) - (a' + x)]$  et  $[(a' + x) - (g' + x)]$ , § 172 page 103. Si donc, on attribue successivement plusieurs valeurs à la graduation  $x$ , et que, pour chacune de ces valeurs, on trace, par les points  $d, a, g$ , les coups d'alidade respectifs  $(d' + x)$ ,  $(a' + x)$ ,  $(g' + x)$  appuyés sur la déclinaison arbitraire  $fz$  du rapporteur : on aura autant de triangles semblables  $r't'v'$ ,  $r''t''v''$ ,... dont les sommets homologues, appartenant au même arc, produiront simultanément les trois arcs  $rr'r''$ ...,  $tt't''$ ...,  $vv'v''$ ..., qui se couperont au point cherché  $z$ .

Le sens de la convergence des arcs étant indiqué par les triangles  $r't'v'$ ,  $r''t''v''$  provenant des deux premières graduations de  $x$ , note 3.<sup>e</sup> page 32 c ; on donnera aussitôt, à cette quantité, les valeurs qui doivent porter la construction des arcs capables dans le voisinage de leur point commun. Et, s'il arrive que la petitesse des triangles  $r't'v'$ ,  $r''t''v''$ ,... rapproche les arcs, de manière à faire douter de leur point d'intersection, on emploiera une autre station pour conclure le point  $z$ , § 78 note 4.<sup>e</sup> page 32 d.

Quand on aura observé les coups d'alidade  $zd$ ,  $za$ ,  $zg$  avec une boussole numérique, on déterminera la déclinaison du rapporteur, qui sera commune à toutes les stations de cette boussole, § 224 page 129 : en appuyant ladite déclinaison sur le coup d'alidade  $a'$  du *plus grand* côté  $za$  correspondant à  $za$ , § 221 page 127.

368. Lorsqu'on opérera avec la planchette : on la déclina sur  $AZ$  par une droite quelconque  $ar'$  (fig. 25), et l'on donnera, par  $d$  et  $g$ , les coups d'alidade  $da'$ ,  $ga'$  sur  $D$  et  $G$ ; ce qui fournira les points  $r'$ ,  $t'$ ,  $v'$  appartenant chacun à un arc capable particulier, § 235 page 133. On déclina, en-

suite, la planchette par une seconde droite  $ar''$ , et l'on donnera de nouveaux coups d'alidade  $dv''$ ,  $gr''$  sur  $d$  et  $g$ , pour obtenir les seconds points  $r''$ ,  $t''$ ,  $v''$  des arcs. En sorte que les cordes  $r'r''$ ,  $v'v''$  indiqueront, par leur convergence, l'emplacement où il faudra construire les parties d'arcs très voisines de leur point commun, § 77 bis note 3.<sup>e</sup> page 32 c, dont la position  $z$  sera vérifiée : quand, la planchette étant déclinée sur la *plus grande* distance  $za$ , les coups d'alidade  $zd$ ,  $zg$  correspondront respectivement aux objets  $d$  et  $g$ ; après s'être assuré, toutefois, que la station  $z$  n'est pas dans le cas exceptionnel du § 78.

Si la planchette a acquis, par un règlement préliminaire § 236, la déclinaison approximative de l'aiguille aimantée : les premiers coups d'alidade qui s'appuieront sur cette déclinaison, tout imparfaite soit elle, § 193, donneront aussitôt des points très voisins du concours des arcs capables.

369. Une station  $z$  est planimétriquement *déterminable* : quand on peut la rattacher à des repères, avec l'un des moyens indiqués aux § 77, 76, 75 et 72 ; et l'on obtiendra sa position graphique  $z$  d'autant plus promptement que  $z$  aura satisfait à plus de conditions locales. Ainsi : 1.<sup>o</sup> par trois points, avec deux arcs capables § 77 (fig. 25) : en marquant ordinairement six coups d'alidade, ou deux déclinaisons provisoires  $ar$ ,  $ar'$  et quatre coups d'alidade  $dv$ ,  $gr$ ,  $dv'$ ,  $gr'$  ; 2.<sup>o</sup> par deux points  $A$ ,  $B$  et une trace  $vz''$  que l'on sait contenir la position graphique de la station, § 76 (fig. 23) : avec un seul arc capable n'exigeant, souvent, que quatre coups d'alidade, ou deux déclinaisons provisoires  $az'$ ,  $ak$  et deux coups d'alidade  $bz'$ ,  $bk$  ; 3.<sup>o</sup> par deux points  $A$ ,  $B$  et une direction déclinoire  $uz$ , § 75 (fig. 23) : avec deux inclinaisons  $Bzu$ ,  $Azu$  qui, appuyées sur cette direction, seront toujours obtenues par une déclinaison  $u'z''$  et deux coups d'alidade  $z''$ ,  $bk$  ; 4.<sup>o</sup> par un point  $B$  extérieur à un alignement  $Az$  qui contient la station, § 72 (fig. 22) : avec une seule inclinaison  $BzA$ , appuyée sur cet alignement et tracée par la déclinaison  $z'a$  et le coup d'alidade  $bz''$ .

On n'espérera donc une station déterminable, dans chaque *petite* région d'un terrain à lever, qu'après avoir placé sur la feuille topographique assez de repères *principaux*, pour que l'observateur puisse rencontrer, avec peu d'hésitation, l'une des quatre circonstances précédentes.

370. La planchette est très favorable aux observations et constructions qui viennent de projeter un lieu de station; et ce goniomètre conduira encore plus promptement aux solutions graphiques, quand on lui aura donné la qualité de boussole, à l'aide du déclinatoire § 236 page 134: car, si la déclinaison par l'aiguille aimantée, après avoir été réglée, se trouve dans de bonnes limites § 193, il suffira de donner cette déclinaison aux coups d'alidade observés sur deux seuls repères, pour déterminer graphiquement le point de station, § 75.

C'est à ce dernier moyen de coordonner une station à deux repères, qu'on tend à rapporter les détails d'un plan; après avoir obtenu des points principaux, dont les intervalles graphiques ne dépassent pas la longueur de l'aiguille aimantée, § 193 page 114, qui devient, ainsi, la limite des côtés d'un canevas graphique.

Et, comme la boussole numérique § 195, accompagnée de son rapporteur § 220, remplace la planchette et le déclinatoire réunis en boussole graphique § 236, une feuille sera dite préparée aux détails planimétriques: lorsqu'elle contiendra assez de points principaux pour que toute station *utile* puisse se rattacher immédiatement à deux de ces repères, avec la boussole graphique ou numérique. Cette feuille sera, même, décomposable en rectangles correspondant à des parties de terrain, qu'il sera commode de lever isolément, pour les raccorder, ensuite, par leurs côtés communs.

#### *Canevas du Nivellement.*

371. On procédera au canevas de nivellement d'une feuille topographique: en calculant, de proche-en-proche, les différences de niveau des points de mire servant déjà de re-

pères au canevas horizontal de cette feuille, pour coordonner verticalement lesdits points par une cote, qui fixe le niveau principal, § 326 page 189.

La projection horizontale et l'inclinaison zénithale de la droite, qui unit visuellement le lieu de station à un point de mire, sont les éléments du calcul de la différence de niveau correspondante, § 336, 337 pages 195, 196 : la distance horizontale résulte du canevas graphique et de l'échelle, et l'on observera l'inclinaison zénithale avec assez de précision, pour tenir compte de la correction due aux influences terrestres, § 335, en recourant, au besoin, à l'éclimètre répétiteur.

372. Afin de ne pas multiplier inutilement les repères du nivellement : on les distribuera sur la feuille, de manière qu'on puisse rapporter à l'un, et même à plusieurs de ces points § 339, la coordonnée verticale de toute station horizontalement déterminable. Et, pour cela, on limitera les distances desdits repères, en raison de l'incertitude d'observation de l'éclimètre employé, § 335 page 195.

Or,  $\frac{M^m}{10000}$  désignant, à l'échelle  $\frac{1}{M}$ , l'erreur tolérée dans l'évaluation des coordonnées topographiques, § 7 page 2; si on représente par  $D$  la distance d'une station à son repère vertical, et par  $\varphi$  le nombre de centigrades échappant à la lecture de l'éclimètre, on aura :

$$\frac{M^m}{10000} > D \sin \varphi, \quad \S \ 83 \text{ page } 43, \quad D < \frac{M^m}{10000 \sin \varphi}; \text{ et,}$$

$$\text{à cause de } \sin \varphi = \frac{\varphi}{6400}, \quad \S \ 54 \text{ page } 25 : D < M \frac{0^m, 64}{\varphi},$$

$$\frac{D}{M} < \frac{0^m, 64}{\varphi}. \text{ C'est-à-dire que tout repère vertical, pour servir d'appui à la cote d'une station, devra en être éloigné}$$

au plus, numériquement de  $M \frac{0^m, 64}{\varphi}$ , et graphiquement

de  $\frac{0^m, 64}{\varphi}$ . Ainsi, les repères verticaux, graphiquement

espacés de  $2 \frac{0^{\text{m}},64}{1} = \frac{1^{\text{m}},28}{1}$ , suffiront au nivellement des stations qui leur seront intermédiaires, en permettant de négliger les corrections de l'influence terrestre, § 335.

L'éclimètre topographique, décrit au § 294 (fig. 115), comportant 5' d'incertitude d'observation, savoir : 2', 5 pour son réglément et 2' 5 à chaque coup d'alidade, on aura  $\varphi = 5$ ; et, alors, les distances graphiques des repères verticaux ne devront pas excéder  $0^{\text{m}},25$ . Or, comme cette longueur dépasse ordinairement celle de l'aiguille aimantée qui vient de limiter les côtés du canevas horizontal, § 370, on voit que les repères indispensables du nivellement seront, souvent, moins nombreux que ceux de la planimétrie.

### CHAPITRE III. : LEVÉ DES DERNIERS DÉTAILS TOPOGRAPHIQUES.

#### *Planimétrie.*

373. Le levé des détails planimétriques consiste à rattacher chaque groupe de points contournant ces détails, à une station auxiliaire qui en soit assez voisine, pour qu'on puisse évaluer, par les mesures directes ou avec la stadia, les distances horizontales de cette station à la plupart desdits points.

C'est du choix des stations auxiliaires, dites *utilement* déterminables, que dépend une bonne et prompte planimétrie.

374. Il est avantageux d'employer la boussole graphique à limbe fixe, ou la boussole numérique à limbe mobile, pour mesurer les angles qui servent à projeter une station auxiliaire et les directions de détail. La boussole graphique, composée de la planchette et du déclinatoire § 236 (fig. 82), marque immédiatement les coups d'alidade; mais elle est moins commode à manœuvrer et à transporter que la boussole numérique, § 200 (fig. 87), dont les coups d'alidade sont tracés avec le rapporteur, § 220.

La déclinaison de la feuille topographique étant, alors, commune à toutes les stations, § 224 page 129; on la mettra en rapport avec l'une ou l'autre boussole: en observant, avec cette boussole, le coup d'alidade sur une direction *av* graphiquement placée en *ab* (fig. 82 et 87), pour effectuer l'une des dispositions suivantes: 1.<sup>o</sup> reconnaître la place *a'd'* du déclinatoire dont l'index *o* aura été donné (fig. 82), § 192 page 114; ou tracer la déclinaison *ep* du rapporteur, § 221 page 127; 2.<sup>o</sup> marquer l'index *o* correspondant à une position particulière *ac* du déclinatoire (fig. 82), § 236 page 134; ou amener, sous l'index de la boussole, la graduation *g* du coup d'alidade *av* (fig. 87), qu'on a graphiquement relevé d'après une déclinaison désignée, § 199 page 117; 3.<sup>o</sup> écrire la graduation *g* du coup d'alidade observé, sur le rayon du rapporteur employé à relever le coup d'alidade graphique *ab* relativement à une déclinaison voulue *ep* (fig. 82), c'est à dire, numérotier le limbe du rapporteur, d'après une boussole et une déclinaison graphique données, § 221 page 128.

375. Lorsqu'on adoptera l'échelle graphique générale (fig. 30) formée des multiples du déci-millimètre, § 10 page 4, on en conclura l'unité de longueur  $L = \frac{M^m}{10000}$ , qui

entrera dans la portée servant à la mesure des distances, § 132, et avec laquelle on réglera la stadia accessible employée à estimer ces distances, § 142, 143, 144 page 81.

Mais, on pourra former l'échelle graphique d'un plan, comme on l'a montré au § 136 page 77, sans recourir à son échelle numérique ni à l'unité de longueur *L*; et souvent, aussi, on se proposera de construire l'échelle en rapport avec la tige graduée et le micromètre d'une stadia, d'après le § 145 page 82.

Enfin, la marche de l'homme est assez peu variable, pour qu'on puisse employer son pas à la mesure des distances, dont la représentation graphique n'excédera pas un centimètre; et l'on en construira l'échelle: soit en comparant



le pas moyen à l'unité de mesure désignée  $L$ , § 135 page 77, soit par le procédé du § 136.

376. C'est ainsi que, pour lever les détails du rectangle *ma*, extrait d'une feuille topographique et préparé par les projections *a, c, g* des points principaux *a clocher, c colombier* et *b cheminée* (fig. 33) : on commencera par régler la déclinaison de la boussole numérique ou celle de la boussole graphique, puis l'échelle de pas ou celle de la stadia. Et, dans ce but, on cherchera une longue direction accessible entre des objets remarquables, tels que l'arbre *x* et la cheminée *a*, § 365 ; on déterminera la station *r*, d'où l'on aperçoit convenablement les repères *a, c, b* par la rencontre *t* d'arcs capables des angles  $\angle ATC$ ,  $\angle CTB$ , qui proviennent des coups d'alidade  $TA$ ,  $TC$ ,  $TB$  tracés : soit avec le rapporteur § 367, d'après les graduations observées à la boussole et écrites au registre topographique ; soit avec la planchette § 368 ; on marquera, ensuite, 1.<sup>o</sup> les déclinaisons *en, dy'* réciproquement complémentaires du rapporteur : en posant, sur la projection *tb* du plus grand côté observé, le rayon 230<sup>e</sup> du limbe numéroté en sens inverse de la boussole, § 221 ; ou 2.<sup>o</sup> le repère *gy'* du déclinatoire, § 192. Et, quand le côté *yy'* du cadre devra servir d'appui au rapporteur et au déclinatoire : on modifiera, en conséquence, la ligne de foi de la boussole § 199, ou la numération du rapporteur § 221, ainsi que l'index du déclinatoire § 236.

377. Après avoir tracé, en *yr*, le coup d'alidade de l'alignement *ya* (fig. 33), on marchera sur cet alignement, en comptant ses pas depuis le point *r* jusqu'au nombre 200, en *x*, où l'on voit encore deux repères *a, c* ; et l'on déterminera graphiquement *x* : soit à la planchette, par la déclinaison sur l'alignement *xv* (préalablement mis en coïncidence avec *ya* au moyen du demi-tour de l'alidade § 138) et par le coup d'alidade *xc* vérifié avec le coup d'alidade *xa* ; soit à la boussole, par ces mêmes coups d'alidade déclinés sur l'appui du rapporteur ou sur celui du déclinatoire. En sorte que le quart de la distance *tx*, n'excédant pas un centimètre, de-

viendra la base d'une échelle de 50 pas, suffisamment exacte pour les détails, § 136 page 77.

Si, en quittant la station  $\tau$ , on y a dressé la tige d'une stadia pour l'observer, en  $x$ , avec son tuyau visuel: on aura l'échelle de stadia, en divisant la longueur graphique  $tx$  par le nombre 127 de parties interceptées sur la tige. Et, attendu que ce nombre n'est pas commode à la construction d'une échelle, on cherchera une autre station  $z$ , dont le coup de stadia sur  $\tau$  produise un nombre 160 favorable à cette construction; et l'on déterminera graphiquement le point  $z$ , avec le coup d'alidade  $z\tau$  vérifié par le coup d'alidade  $zA$ , pour établir, enfin, l'échelle de stadia sur la longueur  $zt$ , § 146 page 82.

378. Les stations  $\tau$ ,  $x$  ou  $z$  (fig. 33), regardées comme auxiliaires des détails qui les avoisinent, ne seront pas abandonnées avant d'avoir estimé, au pas ou à la stadia, les petites longueurs  $\tau 1$ ,  $\tau 2$ ...,  $z 1$ ,  $z 2$ ,  $z n$ ... sur les directions respectives  $\tau A$ ,  $\tau C$ ...,  $z A$ ,  $z B$ ... (fig. 33), afin de placer graphiquement ces détails, dès qu'on aura construit l'une ou l'autre échelle. Les coups d'alidade donnés, en  $\tau$  et  $z$ , sur les objets remarquables  $E'$  moulin-à-vent,  $E$  arbre de la lisière du bois..., projetteront, aussi, ces objets qui peuvent servir de repères.

La station auxiliaire  $s$ , qu'on a pu choisir sur l'alignement  $AC$ , sera déterminée par le seul coup d'alidade  $se'$ , et coordonnera les détails qui l'avoisinent, ainsi que les directions sur l'arbre  $Q$  et le pignon  $E''$ .

La station  $p$ , prise à la rencontre de deux alignements matériels, déterminable à la boussole par les points  $A$ ,  $B$  et vérifiée par  $C$ , procurera les directions  $pQ$ ,  $pe''$ , qui, avec les alignements  $sq$ ,  $se''$ , projetteront  $Q$  et  $E''$  en  $q$  et  $e''$ .

Les stations  $n$  et  $k$  achèveront le contour du village et placeront, par recoupement, des points de repère pour les détails intérieurs de ce village.

Le croquis préliminaire des détails, qui avoisinent une station, facilitera, d'ailleurs, le choix des directions et des di-

stances nécessaires à la projection de ces détails; et le soin, apporté à cette reconnaissance partielle, influera beaucoup sur l'exactitude et la durée des opérations topographiques.

379. On emploie, quelquefois, la méthode des coordonnées; pour lever les détails d'une station, surtout, quand ces détails sont très multipliés comme dans les massifs de maisons, les divisions de culture, les sinuosités des cours d'eau et des chemins; on se borne, alors, à rattacher immédiatement à la station, les alignements les plus propres à servir d'axes coordonnés, par leur voisinage des points de détail.

On trouve le pied de l'ordonnée, oblique ou rectangulaire, abaissée d'un point extérieur à un alignement : en marchant, sur ledit alignement, jusqu'à ce que, l'un des côtés de l'angle ou de l'équerre d'arpenteur étant dirigé dans cet alignement, l'autre côté passe par le point considéré, qu'on dit, alors, avoir reçu un coup d'angle ou d'équerre d'arpenteur, § 238, 239 page 135.

C'est ainsi que, pour lever le contour du bois compris dans l'angle  $APN$  des deux directions  $PA$ ,  $PN$  repérées à la station  $P$  (fig. 33): on parcourra d'abord ce contour, pour en faire le croquis et marquer, au besoin, chaque sommet d'angle par le moindre signe, tel qu'une baguette dont l'extrémité fendue pince un fenillet de papier; des numéros, soigneusement attribués auxdits sommets, serviront à en distinguer les coordonnées sur le croquis.

Après quoi, on marchera de  $P$  vers  $A$  : en donnant des coups d'angle d'arpenteur sur les points 1, 2, 3, 4, 5, 6, et marquant les stations 1', 2', 3',... de l'instrument; on mesurera, chemin faisant ou au retour, la longueur  $P6'$  en cotant les parties  $P1'$ ,  $P2'$ ,  $P3'$ ,  $P4'$ ,  $P5'$ , qui sont les abscisses des points 6, 1, 2, 3, 4, 5 par rapport à l'origine  $P$ ; et l'on évaluera les ordonnées 6'6, 5'5, 4'4 des sommets 6, 5, 4, que l'on ne sera pas sûr de voir en parcourant l'alignement  $PN$ , le long duquel on donnera, aussi, des coups d'angle sur les points 3, 2, 1, 7, 8,... dont on mesurera les abscisses  $P3''$ ,  $P2''$ ,  $P1''$ ,  $P7''$ ,  $P8''$ ,... ainsi que les ordonnées

77", 8"8,.... On portera, maintenant, sur les axes *pa*, *pn* homologues à *PA*, *PN*, les valeurs graphiques des abscisses mesurées, et on élèvera, avec l'inclinaison égale à celle de l'angle d'arpenteur § 238, les ordonnées correspondantes qui détermineront, par leurs rencontres ou leurs longueurs, les positions des sommets dont la liaison figurera le contour proposé.

Les points 1, 2 et 3 sont obtenus par les rencontres de leurs ordonnées relativement aux axes *pa* et *pn*; et tout autre sommet graphique résulte de la longueur même de son ordonnée par rapport à l'un ou à l'autre axe.

360. La ligne d'appui du déclinatoire ou du rapporteur servira à décliner graphiquement les coups d'alidade observés dans toutes les stations de la boussole, tant qu'il n'y aura pas de variation dans la direction spontanément prise par l'aiguille aimantée à chaque station, § 224 page 129. Mais, si, d'un lieu à un autre, l'aiguille obéit à des influences différentes, elle changera de direction, et la déclinaison graphique, à laquelle on devra rapporter les coups d'alidade, ne sera pas la même d'une station à l'autre; en sorte que deux points de repère ne suffiront plus pour projeter immédiatement un lieu de station.

Il faudra donc, pour peu qu'une station ait d'importance, surtout dans le voisinage des édifices, vérifier si l'aiguille de la boussole est restée libre : en donnant, sur un troisième point de repère, le coup d'alidade dont la projection graphique devra passer par la rencontre des traces des coups d'alidade observés sur les deux autres repères. Et, quand les projections de ces trois coups d'alidade ne se couperont pas au même point, on s'en servira pour décrire les arcs capables, dont l'intersection placera graphiquement le lieu de station, § 367 et 368 page 231.

De plus, la ligne d'appui, que cette construction donnera au déclinatoire ou au rapporteur, déviara de celle précédemment tracée, comme la direction actuelle de l'aiguille aimantée par rapport à sa direction primitive.

381. Quoique nous ayons recommandé d'observer les angles plutôt que de mesurer les côtés des triangles, qui coordonnent entre eux les points auxiliaires et matériels d'une carte, § 68, 69, 316, et que nous nous soyons attachés à n'employer que de très petites distances pour projeter les derniers détails de cette carte, § 373, 375; il sera cependant plus simple, et souvent à la portée du plus grand nombre, de dresser un Plan *peu étendu*, avec les longueurs de tous les côtés des triangles d'enchaînement et celles des coordonnées des points remarquables de ce Plan : comme on le pratique dans l'ARPENTAGE, où l'on a, ordinairement, pour but d'évaluer la superficie horizontale d'un terrain peu considérable et de facile accès.

382. Le soin à apporter aux détails d'un Plan est indiqué par la nature des localités à lever, qu'on a, pour cela, classées d'après leur importance, dans l'ordre suivant :

1.<sup>o</sup> Les lits des cours d'eau; les grandes routes; les contours et rues des villes et villages; 2.<sup>o</sup> Les chemins vicinaux; les contours des forêts; les massifs des maisons; les thalwegs § 430; 3.<sup>o</sup> Les escarpements et rochers; les carrières et les mares; les parcs et châteaux; les chemins d'exploitation; les sentiers; les divisions de culture et les jardins.

383. On rattache les rives d'un cours d'eau à des points auxiliaires, se succédant d'assez près pour en décrire les intervalles par coordonnées, § 379, qu'on se contentera souvent d'estimer à vue. On cherchera à déterminer par recoupement, § 378, les objets remarquables d'une rive pendant qu'on parcourra l'autre, afin de dessiner le contour de cette rive sans y aborder.

Les changements de direction d'une grande route se lient à des stations, qu'on ne craindra pas de multiplier.

Le plan des contours et rues des villes et villages, demandera au canevas graphique, § 363, des points de repère assez nombreux pour en donner trois à chaque station, § 380. C'est alors que la stadia accessible sera avantageusement employée pour diminuer les stations auxiliaires, § 377.

Le levé des chemins vicinaux, des contours de forêt, des massifs de maisons et des thalwegs, exigera d'autant moins de stations qu'on en aura mieux étudié les croquis.

Les périmètres des escarpements, rochers et carrières, et ceux des marcs, se rattachent à des alignements auxiliaires, par coordonnées lestemement appréciées. Il est rare que le dessin à vue ne suffise pas à la projection des détails renfermés dans ces périmètres.

On lève les parcs et châteaux : en commençant par leurs contours extérieurs, dont les issues serviront à repérer et à diriger des alignements transversaux, destinés à appuyer les détails intérieurs, pour lesquels on emploiera, sans inconvénient, des distances au pas plus grandes que celles précédemment désignées, § 375 page 236.

Les traces, ordinairement changeantes, des chemins d'exploitation, des sentiers, des divisions de culture, et les détails des jardins, se lient à un petit nombre de stations, que les croquis préparatoires tendent à diminuer.

La boussole, toujours commode par sa déclinaison constante et spontanée, § 374, devient presque indispensable pour lever les terrains couverts et boisés.

### *Nivellement.*

384. Les derniers détails du nivellement se rattachent, par groupes, à des stations auxiliaires, que l'on peut immédiatement coordonner aux points principaux de ce nivellement, et dont un bon choix diminuera le nombre.

On calculera les coordonnées verticales des stations auxiliaires et de leurs points de détail, d'une manière analogue à celle qu'on a employée dans le nivellement principal d'une feuille topographique, § 371, page 234. Seulement, on n'aura pas égard à l'influence terrestre, § 372; et il suffira d'un horizon sensible pour régler l'éclimètre, § 287 p. 165.

385. Quoique l'on évite de revenir aux mêmes lieux, en faisant marcher de front les détails du nivellement et ceux

de la planimétrie de chaque station; les personnes peu exercées à la topographie auront plus de facilité dans le choix des stations du nivellement, si elles n'y procèdent qu'après avoir tracé le plan d'un espace comprenant des formes terrestres bien arrêtées.

386. Supposons, par exemple, que l'étendue *RAPNV* (*fig. 132*), planimétriquement représentée en *rapnv* (*fig. 133*), ait pour repères : les points *A clocher*, *B cheminée* et *C colombier*, dont les coordonnées verticales  $a = 100^{\text{mètres}}$ ,  $b = 72^{\text{m}}$ ,  $c = 63^{\text{m}}, 5$  ont été obtenues par le § 371, et que la station *K*, déterminable par *A* et *B*, soit jugée utile au nivellement des points *B, J, V, L, .....* remarquables sur le sol.

On commencera par inscrire au registre topographique, § 403 page 255, les repères *A, B* et leurs verticales, ainsi que les points *B, J, V, L, .....*, et l'on biffera, dans chaque colonne de ce registre, les places qu'on jugera inutile de remplir.

Puis, on stationnera en *K* l'éclimètre et la boussole, qu'il sera avantageux de réunir (*fig. 115*), § 294 page 169; et l'on observera, sur les points désignés, les coups d'alidade horizontaux et verticaux dont on écrira les graduations dans les emplacements réservés au registre.

On construira, ensuite, la projection *k* de la station *K* (*fig. 133*), et les directions propres à arrêter ou à préparer les positions des points de mire qui n'ont pas encore été remarquables sur le plan; après quoi, on remontera, au moyen de l'échelle  $\frac{1}{5000}$  de la carte, des distances graphiques *ka, kb, kr, kj, kv, kl*, aux distances naturelles homologues  $KA = 320^{\text{m}}$ ,  $KB = 80^{\text{m}}$ ,  $KR = 98^{\text{m}}$ ,  $KJ = 275^{\text{m}}$ ,  $KV = 280^{\text{m}}$ ,  $KL = 175^{\text{m}}$ .

On procédera, alors, au calcul des différences de niveau par la formule  $v - (s + i) = \frac{D}{tg\delta} = \frac{5D}{5tg\delta}$ , § 328 et 353, en appliquant, de préférence, le second type du § 331 page 226; on s'arrêtera aux décimètres, en vertu de l'ap-

proximation  $\frac{3^m}{10000}$  qui est ici de 5 décimètres, § 7 page 2; et l'on formera d'abord:

$$a - (k + i) = \frac{5 \text{ KA}}{5 \text{ tg } 92^{\circ}, 65} = \frac{1600^m}{+ 44} = + 36^m, 3;$$

$$b - (k + i) = \frac{5 \text{ KB}}{5 \text{ tg } 92^{\circ}} = \frac{400}{+ 40} = + 10^m, 0;$$

d'où l'on conclura:

$$\text{verticale } (k + i) = \frac{63^m, 7 + 62^m, 6}{2} = 62^m, 6;$$

et, à cause de  $i = 1^m, 2$ :  $k = 61^m, 4$ .

Enfin, on calculera les verticales:

$$r = (k + i) - 0^m, 9 = 61^m, 7$$

$$j = (k + i) - 5^m, 1 = 57^m, 5$$

$$v = (k + i) - 11^m, 9 = 50^m, 7$$

$$l = (k + i) - 5^m, 4 = 57^m, 2$$

qu'on enregistrera aussitôt, § 403 page 255, en même-temps qu'on les écrira provisoirement contre les points homologues de la carte (*fig.* 133).

En agissant de la même manière aux stations S, P, N, convenablement choisies dans l'étendue RAPNV (*fig.* 132), on en déterminera les verticales des points remarquables, lesquels intercepteront, de proche-en-proche, les parties rectilignes du terrain, dont on construira les points intermédiairement cotés, § 15 page 5, dès qu'il sera utile de les rendre apparents. § 410 page 259. Et ces derniers résultats seront d'autant mieux assurés, qu'on n'aura omis aucune occasion de rattacher les verticales de détail à plusieurs stations, § 339 page 197.

387. La précédente méthode de nivellement est avantageusement modifiée par une interprétation particulière de la formule  $v - (s + i) = \frac{D}{\text{tg } \delta}$ .



En effet, si, dans cette équation, on exprime les verticales  $v$ ,  $s$  et  $i$  en fonction de l'unité de hauteur  $H$ : par  $v = v'H$ ,  $s = s'H$ ,  $i = i'H$ , il viendra :  $v'H - (s' + i')H = \frac{D}{\text{tg } \delta}$ , d'où  $v' - (s' + i') = \frac{D}{H \text{ tg } \delta} = \frac{d}{h \text{ tg } \delta}$ ;  $d$  et  $h$  étant les longueurs graphiques homologues à  $D$  et  $H$ . C'est-à-dire que la différence des cotes  $v'$  et  $(s' + i')$  du point  $v$  au point  $c$  de la station  $K$  (fig. 132, 136), § 403, est égale au quotient  $\frac{d}{h \text{ tg } \delta}$  ou  $\frac{kv}{h \text{ tg } 102^{\circ},70}$ , pour lequel on recourra aux valeurs de  $d$  et  $h \text{ tg } \delta$  en décimillimètres, et qu'on pourra aussi obtenir en portant la longueur  $h \text{ tg } \delta$  sur la distance graphique  $d$  ou  $kv$ , comme on l'a fait § 16 page 7; *pourvu que ce transport ne soit pas répété plus de dix fois.*

On facilite la recherche de  $\frac{d}{h \text{ tg } \delta}$ , au moyen d'une table des valeurs  $h \text{ tg } \delta$  en décimillimètres, laquelle est devenue commune à tous les nivellements, par l'adoption d'une même unité de hauteur graphique  $h$  pour toutes les cartes, § 410 page 259; et c'est à cause de la valeur un demi-millimètre, ou cinq décimillimètres, attribuée à  $h$ , § 411, qu'on a formé la table des quintuples-tangentes du § 309 page 180, donnant les décimillimètres compris dans  $h \text{ tg } \delta$  ou  $\frac{1^m}{2000} \text{ tg } \delta$ . Cette valeur  $\frac{1^m}{2000}$  de l'unité de hauteur graphique  $h$ , établit l'unité de cote  $H = \frac{M^m}{2000}$ , et transforme en  $\frac{H}{5}$  l'approximation  $\frac{M^m}{10000}$  des cotes, qu'il suffit, ainsi, d'obtenir en dixièmes.

Lors donc qu'on aura remplacé les coordonnées verticales  $a^{\text{mtt.}}$ ,  $b^{\text{mtt.}}$ ,  $c^{\text{mtt.}}$ ... des points principaux du nivellement, par les nombres  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ ,.... d'unités de hauteur  $H$  ou  $\frac{M^m}{2000}$

qu'elles contiennent, savoir :  $a' = \frac{a^n}{H} = \frac{2000}{M} a$ ,

$b' = \frac{2000}{M} b$ ,  $c' = \frac{2000}{M} c$ ,... on pourra obtenir les cotes

de détail, par calcul ou par construction, sans remonter des distances graphiques aux distances naturelles.

Et, si l'on veut ensuite traduire ces dernières cotes en mètres, on n'aura qu'à multiplier chacune d'elles par  $\frac{M}{2000}$ .

388. C'est ainsi que, reprenant l'exemple du § 386, page 243, où l'échelle  $\frac{1}{5000}$  fait déduire  $a' = 40$ ,  $b' = 29$ ,  $c' = 25,4$ ,  $i' = 0,5$ , on aura :

$$a' - (k' + i') = \frac{640}{+44} = + 14,5$$

$$b' - (k' + i') = \frac{160}{+40} = + 4,0$$

d'où l'on tirera :  $(k' + i') = \frac{25,5 + 25}{2} = 25,2$  et  $k' = 24,7$ ;

puis, on déterminera, par calcul ou par construction :

$$r' - (k' + i') = - 0,5 \quad \text{pour conclure : } r' = 24,7$$

$$j' - (k' + i') = - 2,1 \quad j' = 23,1$$

$$v' - (k' + i') = - 4,8 \quad v' = 20,3$$

$$l' - (k' + i') = - 2,3 \quad l' = 22,9$$

389. La faible part que prennent, dans le calcul et la construction du nivellement de détail, les deux derniers millimètres des distances graphiques, permet d'apprécier celles-ci avec assez peu d'exactitude pour qu'il suffise de les déterminer à la boussole, en dépassant même les limites imposées aux coups d'alidade de ce goniomètre, § 193 page 114.

390. Quand un point  $\tau$  (fig. 132 et 134) sera assez voisin de la station  $\kappa$ , pour autoriser la construction du quotient  $\frac{d}{h \operatorname{tg} \delta}$ , § 387, et que la pente du terrain sera uniforme de  $\kappa$  en  $\tau$ : on aura, par cette construction même, les cotes des points de la pente  $\kappa\tau$ , si on a observé l'inclinaison zénithale de ladite pente en choisissant un point de mire  $x$  distant du sol  $\tau$ , comme le centre  $c$  de l'éclimètre l'est de  $\kappa$ ; et, alors, il suffira d'obtenir les inclinaisons zénithales à 25 centigrades près.

Caf, la cote  $x'$  du nouveau point de mire dépassant de  $i'$  la cote  $t'$  du point  $\tau$ , ou  $x' = t' + i'$ , la formule du nivellement deviendra  $(t' + i') - (k' + i') = i' - k' = \frac{d}{h \operatorname{tg} \delta}$ ; c'est-à-dire que les unités de la différence  $(t' - k')$  seront données par autant de portées  $h \operatorname{tg} \delta$  sur  $kt$  (fig. 136), et que toutes ces portées marqueront : de  $k$  en  $t$ , où  $\delta$  excède un droit, les points respectivement cotés  $(k' - 1)$ ,  $(k' - 2)$ ,  $(k' - 3)$ , ....; et de  $k$  en  $f$ , où l'inclinaison zénithale est inférieure à un droit, les points cotés  $(k' + 1)$ ,  $(k' + 2)$ , ....

391. Lorsque la cote d'une station sera fractionnaire, et qu'on voudra seulement les points de détail cotés en nombres entiers : on déterminera, sur chaque pente, le premier de ces points pour servir de départ à la construction des autres points à cotes entières de la même pente.

Ainsi, la station  $\kappa$  (fig. 132 et 136) étant cotée  $k' = \alpha + \frac{\beta}{\gamma} = 24,7 = 24 + \frac{2}{3}$ , on conclura les points cotés  $\alpha$ , ou 24, appartenant aux pentes descendantes  $\kappa\tau$ ,  $\kappa u$ ... en portant la fraction  $\frac{\beta}{\gamma}$ , ou  $\frac{2}{3}$ , de  $h \operatorname{tg} \delta_1$ ,  $h \operatorname{tg} \delta_2$ , .... sur les projections  $kt$ ,  $ku$ ... de ces pentes; tandis qu'on aura les points cotés  $(\alpha + 1)$ , ou 25, des pentes ascendantes  $\kappa\tau$ ,  $\kappa c$ ...; en portant, sur les projections respectives desdites pentes, la fraction  $\frac{\gamma - \beta}{\gamma}$ , ou  $\frac{1}{3}$ , de  $h \operatorname{tg} \Delta_1$ ,  $h \operatorname{tg} \Delta_2$ , .... Après quoi,

on transportera, depuis ces premiers points : 1.<sup>o</sup> les longueurs  $htg\delta_1, htg\delta_2, \dots$  sur  $kt, ku, \dots$  pour obtenir les points cotés  $(\alpha-1)$  ou 23,  $(\alpha-2)$  ou 22,  $\dots$  et 2.<sup>o</sup> les longueurs  $htg\delta_1, htg\delta_2, \dots$  sur les projections ascendantes  $kf, kc, \dots$  pour avoir les points cotés  $(\alpha+1)$  ou 25,  $(\alpha+2)$  ou 26,  $\dots$ .

392. Au lieu de traduire graphiquement, à mesure qu'on doit les employer dans la construction des cotes, les valeurs numériques des quintuples-tangentes  $\frac{1^m}{2000} tg\delta$ , on a recours au tableau de ces longueurs qu'on dressera de la manière suivante :

Sur une droite  $oc$  (*fig. 135*), où l'on a marqué 16 parties égales, on élève l'ordonnée 320 décimillimètres ou 64 demi-millimètres, qui est la longueur commune à  $\frac{1^m}{2000} tg 99^\circ$  et à

$\frac{1^m}{2000} tg 101^\circ$ ; on tire  $no$  terminant les ordonnées 4, 8, 12,  $\dots$  demi-millimètres, ou 20, 40, 60,  $\dots$  décimillimètres, et l'on écrit sur chacune de ces ordonnées les deux graduations  $(100^\circ - x)$ ,  $(100^\circ + x)$ , trouvées pour l'inclinaison  $\delta$  en regard de ladite ordonnée dans la table du § 309, page 180. De sorte que toute autre valeur de  $\frac{1^m}{2000} tg\delta$  sera comprise entre les tangentes des deux inclinaisons immédiatement inférieure et supérieure à  $\delta$ , et réciproquement.

393. La différence de niveau  $(vn+cs)$ , d'un point de mire  $v$  à un lieu de station  $s$  (*fig. 137*), est encore donnée par  $vn=cv \cos x cv$ . Or, on conclut  $cv$  : de la longueur accessible  $cc''$  ou  $ss''$  et des angles  $c''cv$ ,  $cc''v$  observés en  $c$  et  $c''$ , par  $cv = cc'' \frac{\sin cc''v}{\sin cc''v + c''cv}$ ; en sorte que

$$vn = cc'' \frac{\cos x cv \sin cc''v}{\sin (cc''v + c''cv)}.$$

Quand le point de mire  $v$  sera plus élevé que les stations  $c, c''$ , et qu'on pourra prendre la base auxiliaire  $cc''$  sur l'horizontale  $cn$ , en  $cc'$  : angle  $cc''v$  deviendra  $cc'v$  ou

( $1^d - z'c'v$ ), angle  $c''cv$  deviendra  $c'cv$  ou ( $1^d + zcv$ ), et la valeur de  $vn$  se transformera en :

$$c'c' \frac{\cos z'c'v \cos zcv}{\sin (z'c'v - zcv)} = \frac{cc'}{\lg z'c'v - \lg zcv}.$$

394. Au défaut d'éclimètre pour observer les inclinaisons zénithales  $zcv$ ,  $z'c'v$  (fig. 137), on obtiendra : 1.<sup>o</sup>  $\lg zcv$ , en mesurant la distance horizontale  $ts$  et les verticales  $at$ ,  $cs$ , dont les extrémités  $a, c$  alignent la direction  $cv$ , pour avoir

$$\lg zcv = \frac{ts}{at - cs}; \quad 2.<sup>o</sup>  $\lg z'c'v$ , en mesurant la distance ho-$$

rizontale  $t's'$ , ainsi que les verticales  $a't'$  et  $c's'$  ou  $cs$ , dont les extrémités  $a', c'$  alignent la direction  $c'v$ , pour avoir

$$\lg z'c'v = \frac{t's'}{a't' - cs}. \quad \text{De sorte que la précédente valeur de}$$

$vn$  deviendra  $ss' \frac{(at - cs)(a't' - cs)}{t's'(at - cs) - ts(a't' - cs)}$ , qui, si l'on

prend égales les verticales  $a't'$ ,  $at$ , se simplifiera en

$$vn = \frac{ss'(a't' - cs)}{t's' - ts} = \frac{ss' \times a'b'}{t's' - ts}; \quad \text{résultat qu'on aurait pu}$$

trouver immédiatement, en supposant  $ts$  porté de  $t'$  en  $q$ , ou  $pc' = b'c' - bc$ , et imaginant la droite  $a'p$ , qui, parallèle à  $cv$ , rend semblables les triangles  $c'pa'$ ,  $c'cv$ , dont les hauteurs  $a'b'$ ,  $vn$  sont proportionnelles aux bases  $pc'$  ou  $t's' - ts$ , et  $c'c$  ou  $ss'$ .

Ce dernier moyen de coordonner verticalement une station à un point de mire *plus élevé qu'elle*, permettra d'exécuter, avec un seul jalon et par la mesure de petites longueurs, le nivellement *approximatif* d'un terrain, dont les points remarquables pourront être mis en rapport deux-à-deux, avec un même point de mire auxiliaire.

395. Le nivellement, entre des points accessibles, peut s'effectuer, d'après l'énoncé du § 327 : en comparant les verticales desdits points à celle d'une station *dont ils sont peu éloignés* au moyen de la mire, § 278, et du niveau

visuel, § 274, qu'il suffira alors de régler sur un horizon sensible, § 275 page 158.

L'apposition de la verticale de station  $sr$  sur la verticale  $av$  du point  $A$  situé au-dessous de l'horizontale  $rv$  (fig. 140), consiste à donner un coup de niveau du point  $c$  sur  $av$  : en dirigeant l'axe visuel  $rc$  du niveau sur le voyant  $v$  de la mire  $ra$ , dont on notera la graduation  $a'$ , § 339; et l'on exprimera le résultat de cette observation par  $s + i = a + a'$  :  $i$  étant la distance verticale du niveau  $rc$  au point de station  $s$ ,  $s$  la distance  $sr$  de  $s$  à l'horizon de repère  $rv$ , et  $a$  représentant la verticale  $av$ .

Pour observer le coup de niveau sur la verticule  $bx$  du point  $B$  supérieur à l'horizontale  $rv'$  (fig. 140), on suspendra la mire en ce point : et,  $\lambda$  étant la longueur de la règle  $ov'$ , la graduation du coup de niveau se composera de  $(b' - \lambda)$ ; en sorte que l'on écrira  $s + i = b + (b' - \lambda)$ .

396. On obtiendra, d'après cela, les différences de niveau des points  $B, N, T, F, C, \dots$  accessibles à la mire qu'on apercevra d'une station  $P$  (fig. 124), en donnant les coups de niveau sur ces points pour avoir :

$$\begin{array}{ll}
 p + i = b + b' & \text{et} \quad p - b = b' - i \\
 p + i = n + n' & b - n = n' - b' \\
 p + i = t + (t' - \lambda) & n - t = t' - n' \\
 p + i = f + f' & t - f = f' - (t' - \lambda) \\
 p + i = c + c' & f - c = c' - f' \\
 \dots & \dots
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{d'où l'on conclura aussi : } p = (b + b') - i \\
 \quad \quad \quad n = (b + b') - n' \\
 \quad \quad \quad t = (b + b') - (t' - \lambda) \\
 \quad \quad \quad f = (b + b') - f' \\
 \quad \quad \quad c = (b + b') - c' \\
 \quad \quad \quad \dots
 \end{array}$$

Et, si l'on fixe l'horizon de repère, par une valeur  $b$  at-

tribuée à la verticale d'un point quelconque  $B$ , § 326, il suffira de *retrancher* successivement du terme  $(b + b')$ , les graduations  $n'$ ,  $(t' - \lambda)$ ,  $f'$ ,  $c'$ ,... des coups de niveau donnés sur les points  $N$ ,  $T$ ,  $F$ ,... pour avoir, aussitôt, les cordonnées verticales  $n$ ,  $t$ ,  $f$ ,... de ces points.

397. Les points  $C$ ,  $A$ ,  $H$ ,... où la mire sera visible de la station  $R$  (fig. 127), se coordonneront verticalement entre eux, par les coups de niveau qu'ils recevront de cette station; en sorte que:

$$\begin{aligned} r + i &= c + c'' & \text{d'où: } r &= (c + c'') - i \\ r + i &= a + a' & a &= (c + c'') - a' \\ r + i &= h + (h' - \lambda) & h &= (c + c'') - (h' - \lambda) \end{aligned}$$

Et ce nivellement partiel aura le repère du nivellement précédent, s'il a, avec ce dernier, un point commun  $c$  (fig. 120), dont le terme  $(c + c'')$  servira, alors, à former immédiatement les nouvelles cordonnées verticales  $a$ ,  $h$ ,...

Lors donc qu'on voudra appliquer cette méthode de nivellement aux points accessibles  $N$ ,  $B$ ,  $K$ ,  $L$ ,  $T$ ,  $F$ ,  $C$ ,  $Q$ ,  $A$ ,  $E$  (fig. 120): on les partagera en groupes  $(N, T, C, F)$ ,  $(F, B, K, L)$ ,  $(B, Q, E)$ ,  $(E, A, U)$ ,  $(C, H)$  se rattachant chacun à une station particulière  $V$ ,  $P$ ,  $G$ ,  $J$ ,  $R$  du niveau, et ayant un point commun de l'un à l'autre groupe, pour avoir les résultats:

| en $V$                        | en $P$                        | en $G$             |
|-------------------------------|-------------------------------|--------------------|
| $n - f = f' - n'$             | $f - b = b' - f''$            | $q - b = b'' - q$  |
| $t - f = f' - (t' - \lambda)$ | $k - b = b' - k'$             | $e - b = b'' - e'$ |
| $c - f = f' - c'$             | $l - b = l' - b'$             |                    |
| en $J$                        | en $R$                        |                    |
| $a - e = e'' - a'$            | $h - c = c'' - (h - \lambda)$ |                    |
| $u - e = e'' - u'$            |                               |                    |

desquels on tire:

$$\begin{array}{ll} n = (f + f') - n' & f = (b + b') - f'' \\ t = (f + f') - (t' - \lambda) & k = (b + b') - k' \\ c = (f + f') - c' & l = (b + b') - l' \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} g = (b + b'') - g' & a = (e + e'') - a' & h = (c + c'') - (h' - \lambda) \\ e = (b + b'') - e' & u = (e + e'') - u' & \end{array}$$

Et, en partant de la coordonnée verticale  $b$  du point  $\mathbf{p}$ , on formera le terme  $(b + b')$  pour obtenir aussitôt  $f, k, l$ ; puis, on composera le terme  $(f + f')$  de la station  $\mathbf{v}$ , et celui  $(b + b'')$  de la station  $\mathbf{g}$ . Le point  $\mathbf{x}$  appartenant aux groupes  $\mathbf{g}$  et  $\mathbf{j}$  fournira le terme  $(e + e'')$  de  $\mathbf{j}$ ; et, enfin,  $c$  étant commun aux nivellements partiels des stations  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{x}$ ,  $(c + c'')$  deviendra le terme de la station  $\mathbf{x}$ .

Les observations de ce nivellement s'enregistrent dans un tableau, § 404 page 256, où l'on obtient promptement les coordonnées verticales des points de chaque station : en formant le *terme* de cette station, pour en *retrancher* successivement les graduations des coups de niveau donnés sur lesdits points.

398. La différence de niveau entre deux quelconques des points précédents, se trouvera par les relations qui *-ne* chainent, d'une manière continue et à de petites distances, leurs coordonnées verticales à des points intermédiaires.

C'est ainsi que, pour avoir la différence de niveau entre  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{x}$  (fig. 120), on emploiera les relations :

$$\begin{array}{ll} f - b = b' - f'' & \text{provenant de la station } \mathbf{p} \\ c - f = f' - c' & \text{station } \mathbf{v} \\ h - c = c'' - (h' - \lambda) & \text{station } \mathbf{x} \end{array}$$

qui, par l'élimination des verticales intermédiaires  $f$  et  $c$ , fournissent :

$$h - b = (b' + f' + c'') - (f'' + c' + (h' - \lambda)).$$



De même, la différence de niveau entre  $n$  et  $v$  résultera des relations :

$$\begin{array}{ll} n - f = f' - n' & \text{provenant de la station } v \\ f - b = b' - f'' & \text{station } p \\ b - c = c' - b'' & \text{station } e \\ c - u = u' - c'' & \text{station } j \end{array}$$

$$\text{d'où : } u - n = (n' + f' + b'' + c'') - (f' + b' + c' + u').$$

Comme chacun des points intermédiaires, servant à lier les deux points proposés, reçoit deux coups de niveau : on donne le nom de *coup d'arrière*, au coup de niveau dirigé du côté du point de départ, et celui de *coup d'avant*, au coup de niveau dirigé vers le point d'arrivée ; ce qui fait dire que la différence de niveau des deux extrémités d'une ligne, est égale à la somme des graduations de mire correspondant aux coups d'arrière *moins* la somme des graduations de mire des coups d'avant.

399. Au lieu de conserver le niveau visuel à la même place, pour transporter la mire sur tous les points à niveler ; on pourra, quoique moins commodément, laisser la mire au point  $v$  et stationner successivement le niveau visuel sur les points à niveler  $n, b, l, f, c, \dots$  (fig. 122). Car, en adoptant une notation semblable à la précédente, et supposant une même hauteur  $i$  au niveau, il viendra :

$$\begin{array}{lll} n + i = v + n_i & b - n = b_i - n_i & \text{et } b = (n - n_i) + b_i \\ b + i = v + b_i & l - b = l_i - b_i & l = (n - n_i) + l_i \\ l + i = v + l_i & f - l = f_i - l_i & f = (n - n_i) + f_i \\ f + i = v + f_i & \dots & \dots \end{array}$$

C'est-à-dire que la coordonnée verticale de chaque point s'obtiendra en *ajoutant* le terme  $(n - n_i)$  à la graduation du coup de niveau donné, de ce point, sur le repère auxiliaire

occupé par la mire; ce qui est analogue à la méthode du § 396, page 250.

400. Les cotes verticales doivent être distribuées en raison de l'importance des diverses parties de la carte. Ainsi : 1.<sup>o</sup> on ne saurait trop les multiplier, soit directement soit par intercalation, sur chaque thalweg, formé par l'intersection de deux pans ou par le raccord de deux nappes concaves du terrain, § 430; 2.<sup>o</sup> le col, qui est un élément commun aux crêtes de deux surfaces convexes se pénétrant et aux deux versants ou thalwegs, exige que sa cote soit vérifiée si elle est conclue; 3.<sup>o</sup> enfin, les crêtes ou lignes de partage des eaux des surfaces convexes ou croupes, les sommets des mamelons et les fonds des vallées, demandent aussi quelques cotes précises.

401. Les terrains couverts et boisés se prêtant difficilement à un nivellement détaillé, sans qu'on n'y ouvre des jours, ou laies, sur les points de repère : on se contentera, souvent, des stations sur les sommets et les fonds de ces terrains; sauf à exagérer la méthode d'intercalation pour marquer des points intermédiaires, dont un croquis détaillé atténuera l'imparfaite disposition.

402. Quand on pourra se procurer des matériaux topographiques sur les localités à lever, on abrégera considérablement l'exécution des détails : en copiant à l'échelle du levé § 113 et 445, ces matériaux, tout imparfaits soient-ils, pour les encadrer ensuite, très légèrement au crayon, dans le canevas graphique. Il suffira alors de reconnaître cette préparation sur le terrain, et l'on emploiera, à la rectifier, beaucoup moins de temps qu'au levé entier des détails.

C'est ainsi que la planimétrie de la nouvelle carte de France tire un grand secours des feuilles du Cadastre.

## 403. Registre d'observations topographiques.

| STATIONS | Points visés | COUPS D'ALIDADE.   |                      | DISTANCES      |                     |                               | COTES VERTICALES des points de mire. |                 | REMARKS.                                                                          |
|----------|--------------|--------------------|----------------------|----------------|---------------------|-------------------------------|--------------------------------------|-----------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
|          |              | horizontaux        | verticaux            | mesurés en pas | estimés à la stadia | Graphiques en décimillimètres | en mètres                            | équivalences en |                                                                                   |
| S        | V            | G                  | 60                   |                |                     |                               | m                                    | m'              |                                                                                   |
| T        | A            | 150 <sup>8</sup>   |                      | ...            | ...                 |                               |                                      |                 | Pour décliner le rapporteur.<br><br>(Pg. 55) § 576, 577 et 578, pages 257 et 258. |
|          | B            | (230)              |                      | ...            | ...                 |                               |                                      |                 |                                                                                   |
|          | C            | 200, $\frac{1}{2}$ |                      | ...            | ...                 |                               |                                      |                 |                                                                                   |
|          | R            | 267, $\frac{1}{2}$ |                      | ...            | ...                 |                               |                                      |                 |                                                                                   |
|          | X            | ...                |                      | (200)          | 127                 |                               |                                      |                 |                                                                                   |
|          | Z            | ...                |                      | ...            | (60)                |                               |                                      |                 |                                                                                   |
|          | E            | 256                |                      | ...            | ...                 |                               |                                      |                 |                                                                                   |
|          | E'           | 167, $\frac{1}{2}$ |                      | ...            | ...                 |                               |                                      |                 |                                                                                   |
|          | 1            | ...                |                      | 22             | ...                 |                               |                                      |                 |                                                                                   |
|          | 2            | ...                |                      | 46             | ...                 |                               |                                      |                 |                                                                                   |
| X        | C            | 153                |                      |                |                     |                               |                                      |                 | M=5000<br>(Pg. 152, 153, 156)<br>§ 586, page 245,<br>et § 588, page 246.          |
|          | A            | 111, $\frac{1}{2}$ |                      |                |                     |                               |                                      |                 |                                                                                   |
| Z        | B            | 189                |                      |                |                     |                               |                                      |                 |                                                                                   |
|          | A            | 106, $\frac{3}{4}$ |                      |                |                     |                               |                                      |                 |                                                                                   |
|          | E            | 95                 |                      |                |                     |                               |                                      |                 |                                                                                   |
|          | E'           | 88                 |                      |                |                     |                               |                                      |                 |                                                                                   |
| K        | A            | 84, $\frac{1}{2}$  | 92 <sup>8</sup> , 65 | ...            | ...                 | 640                           | (100)                                | (40)            |                                                                                   |
|          | F            | ...                | ...                  | ...            | ...                 | ...                           | ...                                  | 26,5            |                                                                                   |
|          | B            | 152                | 92, ...              | ...            | ...                 | 160                           | (72,6)                               | (29)            |                                                                                   |
|          | J            | 217, $\frac{1}{2}$ | 101, 17              | ...            | ...                 | 550                           | 57,5                                 | 23,1            |                                                                                   |
|          | T            | ...                | ...                  | ...            | ...                 | ...                           | ...                                  | 22,5            |                                                                                   |
|          | V            | ...                | 102, 70              | ...            | ...                 | 560                           | 50,7                                 | 20,3            |                                                                                   |
|          | L            | ...                | 100, 95              | ...            | ...                 | 350                           | 57,2                                 | 22,9            |                                                                                   |
|          | U            | 345                | ...                  | ...            | 128                 | ...                           | ...                                  | 23,5            |                                                                                   |
|          | R            | ...                | 100, 57              | ...            | ...                 | 195                           | 61,7                                 | 24,7            |                                                                                   |

 $i = 1, m_2$  $k = 61 m, 7$  $r = 0,5$  $k' = 24,7$

404. Registre du nivellement, exécuté avec la mire et le niveau visuel, § 397 page 252 (fig. 120).

| STATIONS<br>DU NIVEAU        | POINTS<br>OBSERVÉS | GRADUATIONS<br>DE LA MIRE | COORDONNÉES<br>VERTICALES<br>DES PIEDS DE<br>MIRE | REMARQUES      |
|------------------------------|--------------------|---------------------------|---------------------------------------------------|----------------|
| V<br><br>$v = (f + f') - i$  | N                  | $n'$                      | $n$                                               |                |
|                              | T                  | $t' - \lambda$            | $t$                                               |                |
|                              | C                  | $c'$                      | $c$                                               |                |
|                              | F                  | $f'$                      | $(f)$ . . .                                       | à la station P |
| P<br><br>$p = (b + b') - i$  | F                  | $f''$                     | $f$                                               |                |
|                              | B                  | $b'$                      | $(b)$ . . .                                       | origine        |
|                              | K                  | $k'$                      | $k$                                               |                |
|                              | L                  | $l'$                      | $l$                                               |                |
| G<br><br>$g = (b + b'') - i$ | B                  | $b''$                     | $(b)$ . . .                                       | origine        |
|                              | Q                  | $q'$                      | $q$                                               |                |
|                              | E                  | $e'$                      | $e$                                               |                |
| J<br><br>$j = (e + e'') - i$ | E                  | $e''$                     | $(e)$ . . .                                       | à la station G |
|                              | A                  | $a'$                      | $a$                                               |                |
|                              | U                  | $u'$                      | $u$                                               |                |
| R<br><br>$r = (e + e'') - i$ | C                  | $c''$                     | $(e)$ . . .                                       | à la station V |
|                              | H                  | $h' - \lambda$            | $h$                                               |                |

## CHAPITRE IV : RÉDACTION DE LA CARTE.

405. La rédaction d'une carte comporte : 1.<sup>o</sup> l'esquisse du plan ; 2.<sup>o</sup> le figuré du nivellement ; 3.<sup>o</sup> le lavis des teintes conventionnelles ; 4.<sup>o</sup> l'écriture des noms les plus essentiels.

Le Dépôt de la Guerre et toutes les administrations, qui emploient les cartes topographiques, ont adopté, pour leur rédaction, des moyens et des signes conventionnels dont nous indiquerons, seulement, les plus importants et les plus usités.

*Esquisse du Plan.*

406. On esquisse au crayon les contours du plan, pendant qu'on en lève les détails. Ils sont formés : par les terres, par les murs et les édifices, et par les eaux.

Les contours des terres sont arrêtés par les routes, chemins et sentiers, les fossés, les divisions de culture, les palissades et les haies.

Les routes et les chemins se dessinent avec deux traits, également épais et ordinairement parallèles, représentant les lignes qui bordent leur largeur. La modification des traits permet d'indiquer la nature des chemins (fig. 133).

Le chemin praticable aux voitures se marque par deux lignes pleines; celui non praticable aux voitures a un trait plein et l'autre coupé par de petits intervalles; le chemin d'exploitation, qui se perd dans les terres, a ses deux traits formés avec des éléments séparés.

Le sentier se représente avec un seul trait, qui est plein pour le sentier continu, et coupé par éléments quand il se perd.

Un fossé se dessine par deux traits minces et très rapprochés limitant son encaissement. On marque la division de culture avec un seul trait mince; et, lorsqu'elle porte une

*palissade* ou une *haie* : la palissade s'indique par de petits points ronds, égaux et uniformément distants, et la haie se fait avec des points ronds, inégaux et contigus.

Le trait d'un *mur* se distingue par son épaisseur; il est coupé par éléments, quand le mur est en ruines. On remplit de hachures légères les projections des édifices.

Quand un *ruisseau* peut être franchi sans pont, on le désigne par un seul trait plus ou moins épais et un peu tremblé. Un *aqueduc souterrain* est indiqué par éléments de lignes.

Les *arbres isolés* se représentent avec de petits points ronds, et l'on note les diverses *cultures* par les initiales de leurs noms.

Toute ligne du plan, qui rappelle un alignement tiré au cordeau, doit être tracée à la règle.

La meilleure taille du crayon en dégarnit beaucoup le bois ou l'enveloppe, tandis qu'elle donne à la mine une forme conique écrasée.

407. On emploie, pour le trait à la *plume*, les couleurs noire, rouge et bleue, qui, faites avec l'encre de Chine, le carmin et l'indigo, sont respectivement affectées aux principaux contours du plan : l'encre noire indique les séparations des terres, on l'affaiblit beaucoup pour les divisions de culture et les lettres initiales de leurs noms; l'encre rouge dessine les contours en maçonnerie; et l'encre bleue marque les contours des eaux.

408. On exprime qu'un chemin est *pavé* ou *ferré*, au moyen d'une trace pâle, rouge ou noire, sur le milieu de sa largeur.

Le moulin-à-vent *e'* est indiqué par le croisement de deux traits noirs (*fig. 133*); et le moulin-à-eau *v* par une roue noire.

Le pont en pierre *o* a ses traits rouges épais; le pont en bois *y* est tracé à l'encre noire, et couvert de hachures perpendiculaires à sa longueur.

On désigne un cimetière, en le parsemant de petites croix noires.

On reconnaît les points trigonométriques d'une carte, en les entourant d'un petit triangle équilatéral à l'encre noire, comme en *a* (fig. 133).

On marque tous ces signes, au moment d'écrire la carte.

409. On procède au trait à la plume, en commençant par les moindres détails et dans l'ordre suivant : 1.<sup>o</sup> le trait mince du cadre de la carte; 2.<sup>o</sup> les murs et les édifices; 3.<sup>o</sup> les contours des eaux; 4.<sup>o</sup> les chemins et sentiers; 5.<sup>o</sup> les jardins; 6.<sup>o</sup> les fossés; 7.<sup>o</sup> les divisions de culture et les places des haies; 8.<sup>o</sup> les contours des masses de rochers et des escarpements; 9.<sup>o</sup> les *petites* majuscules initiales des noms des cultures.

La plume dure est la plus favorable au trait; on en taille les deux becs égaux, qu'on fait porter ensemble sur l'épaisseur des lignes en tournant le papier de manière à tirer ces lignes de haut en bas.

#### *Figuré du Nivellement.*

410. Les coordonnées verticales, écrites au crayon à mesure qu'on les aura obtenues, serviront à tracer les sections parallèles qui doivent compléter la description graphique du terrain, § 315; et, pour ne conserver que les sections principales, § 35, il s'agira de choisir l'équidistance de ces sections ou l'équidifférence des verticales;

Comme il importe beaucoup de comparer facilement les pentes des parties du terrain décrit par une carte, on fera entrer le moins d'éléments possible dans cette comparaison. Et, parce que les angles de pente, ainsi que leurs indices trigonométriques, sont indépendants des longueurs desdites pentes, on conclura que ces pentes devront être comparables sans employer l'échelle de la carte.

Mais, dans une description ne contenant que des sections principales (fig. 10 et 136), toute facette de la surface est limitée par deux sections consécutives qui arrêtent, par leurs

projections, la base de la pente correspondante dont l'équidistance graphique est la hauteur; et l'on n'aura, pour apprécier, sur une carte, l'inclinaison à l'horizon de chaque pente partielle, que le rapport de la hauteur de cette pente à sa base, ou sa *tangente*.

D'ailleurs, les bases graphiques des pentes étant seules marquées sur la carte, tandis qu'il en faudra construire la hauteur; la comparaison des pentes, sur des cartes à échelles différentes, exigera, pour être immédiate, que les pentes de même inclinaison aient une égale base graphique et, par conséquent, une commune hauteur, qui sera l'équidistance graphique  $\frac{H}{M}$  devenue, ainsi, constante pour toutes les cartes.

Cette conclusion, en s'accordant avec la relation générale du § 36, page 14, ne fait que spécialiser, pour les cartes, le degré du rapport inverse reconnu nécessaire entre l'équidistance des sections principales et l'échelle de description d'un corps quelconque : par le choix du rapport le plus simple pour décrire les corps les plus étendus.

411. L'expérience seule pouvait conduire à la valeur de l'équidistance graphique; c'est pour cela que nous avons consulté les cartes exécutées *dans des buts utiles* par plusieurs administrations. Et, en concluant l'équidistance graphique de chaque carte, d'après l'équidifférence donnée aux verticales principales de cette carte, nous avons reconnu la presque-identité de toutes les équidistances graphiques, dont la valeur moyenne s'est trouvée si peu différente de cinq décimillètres, que nous avons adopté le *demi-millimètre* pour équidistance graphique commune à toutes les cartes.



EXTRAIT DES DOCUMENTS QUI ONT SERVI À DÉTERMINER  
L'ÉQUIDISTANCE GRAPHIQUE.

| SUR DE LA CARTE                  | ÉCHELLE = $\frac{1}{M}$                 | ÉQUIDIFFÉRENCE H<br>des cordonnées<br>verticales. | ÉQUIDISTANCE<br>graphique = $\frac{H}{M}$ |
|----------------------------------|-----------------------------------------|---------------------------------------------------|-------------------------------------------|
| Cours d'eau<br>et Canaux         | 5 mil p. 1 mèt ou $\frac{1}{200}$       | 0, m 1                                            | 0, millim 50                              |
|                                  | 1 lig p. 1 pied... $\frac{1}{144}$      | 3 poudres = 0, 08                                 | 0, 55                                     |
| Chemins de fer                   | 1 mil p. 1 mèt... $\frac{1}{1000}$      | 0, m 5                                            | 0, millim 50                              |
|                                  | 1 lig p. 1 toise... $\frac{1}{864}$     | 1 pied = 0, 33                                    | 0, 38                                     |
| Arpentage<br>et<br>Terrassements | 1 mil p. 2 mèt... $\frac{1}{2000}$      | 1, m                                              | 0, millim 50                              |
|                                  | 1 lig p. 2 toises... $\frac{1}{1728}$   | 3 pieds = 0, 98                                   | 0, 56                                     |
| Limites<br>de territoires        | 1 mil p. 5 mèt... $\frac{1}{5000}$      | 2, m                                              | 0, millim 40                              |
|                                  | 1 lig p. 5 toises... $\frac{1}{4320}$   | 1 toise = 1, 95                                   | 0, 47                                     |
| Cartes<br>topographiques         | 1 mil p. 10 mèt... $\frac{1}{10000}$    | 5, m                                              | 0, millim 50                              |
|                                  | 1 lig p. 10 toises... $\frac{1}{8640}$  | 2 toises = 3, 90                                  | 0, 45                                     |
|                                  | 1 mil p. 20 mèt... $\frac{1}{20000}$    | 10, m                                             | 0, 50                                     |
|                                  | 1 lig p. 20 toises... $\frac{1}{17280}$ | 4 toises = 7, 80                                  | 0, 45                                     |

412. L'équidifférence des coordonnées verticales d'un Levé sera donc donnée par  $\frac{M^m}{2000}$ ; en sorte que, si, par tant des résultats immédiats du nivellement, § 386, 391, on détermine, *par intercalation*, les points dont les coordonnées verticales soient multiples de l'équidifférence, ces points appartiendront aux sections principales, § 35 page 13, dont chaque partie sera contournée, d'un point à l'autre, d'après les formes étudiées dans les croquis des stations, § 451 page 280, et qui, *tracées à l'encre noire*, figureront le nivellement de la carte (fig. 136).

413. Cette construction produira des teintes, foncées en raison du rapprochement des projections principales ou de la rapidité des pentes définies par ces projections : tellement que la comparaison desdites teintes favorisera celle des pentes correspondantes. Mais, comme ces teintes auront d'autant moins d'apparence que les détails du plan seront plus nombreux et plus rapprochés, c'est-à-dire que l'échelle de la carte sera moins grande, elles ne suffiront pas au but essentiel de distinguer promptement la nature des pentes sur une carte dont l'échelle sera inférieure à  $\frac{1}{5000}$ .

414. On s'est alors proposé de renforcer les teintes des sections principales, en ne changeant pas les rapports de ces teintes, et sans nuire aux détails du plan.

Or, les effets par le pinceau, l'estompe et les hachures croisées, permettant très difficilement de conserver et de faire ressortir les minutieux détails d'une carte, on a dû renforcer les teintes du nivellement avec des traits non croisés ; et l'on a choisi, pour hachures de remplissage, les projections de plus grande pente, regardées comme génératrices de la surface décrite, § 34 page 13, et dont les directions non croisées résultent immédiatement de l'esquisse des sections principales, § 22.

415. Une teinte  $\tau$ , faite avec des traits non croisés, dépend de l'intensité  $i$  de l'encre employée, de la grosseur  $g$  de ces traits et de leurs espacements  $e$  ;  $\tau$  est donc une fonction de  $i$ ,  $g$  et  $e$ , qui, devenant nulle par une des hypothèses  $i=0$ ,  $g=0$  et  $e=\frac{1}{0}$ , aura la forme  $\Delta \frac{i^x g^y}{e^z}$  ; le facteur  $\Delta$  se rapportant à la couleur ou au fond du papier.

En désignant par  $i, g, e$ , les éléments d'une autre teinte  $t$  sur le même fond  $\Delta$  ; on aura aussi  $t = \Delta \frac{i^x g^y}{e^z}$ , dont la comparaison avec la précédente valeur de  $\tau$  fournit  $\frac{\tau}{t} = \left(\frac{i}{i}\right)^x \left(\frac{g}{g}\right)^y \left(\frac{e}{e}\right)^z$ , où l'on aperçoit comment, sans

changer le rapport de deux teintes, on peut les modifier par l'intensité, la grosseur et l'espacement leurs hachures; et la plus simple de ces modifications résulte de la double hypothèse  $i=i$ ,  $g=g$ , qui, transformant  $\frac{\tau}{t}$  en  $\left(\frac{e}{E}\right)^2$ , montre que le rapport de deux teintes, faites *sur le même fond*, § 439 page 275, avec des traits de même encre et également épais, ne varie pas quand le rapport des espacements de ces traits est constant; c'est-à-dire que l'intercalation d'un même nombre de hachures, dans les espacements de deux teintes  $\tau$  et  $t$ , produisent de nouvelles teintes  $\tau'$  et  $t'$  telles que  $\frac{\tau'}{t'} = \frac{\tau}{t}$ .

446. D'après cela, si on remplit les zones, formées par l'esquisse *au crayon* des projections principales, avec des hachures de plus grande pente uniformément grosses et noires, de manière que les espacements  $\epsilon$ ,  $\epsilon'$ ,  $\epsilon''$ ... de ces hachures soient dans le même rapport que les largeurs  $\lambda$ ,  $\lambda'$ ,  $\lambda''$ ... desdites zones, ou  $\frac{\epsilon}{\epsilon'} = \frac{\lambda}{\lambda'}$ ,  $\frac{\epsilon}{\epsilon''} = \frac{\lambda}{\lambda''}$ , .....: les nouvelles teintes auront entre elles le rapport des teintes esquissées; et, attendu que  $\frac{\lambda}{\epsilon} = \frac{\lambda'}{\epsilon'} = \frac{\lambda''}{\epsilon''} = r$ , ou  $\epsilon = \frac{\lambda}{r}$ ,  $\epsilon' = \frac{\lambda'}{r}$ , ... on conclura que les hachures de plus grande pente, destinées à renforcer les teintes esquissées par les projections principales d'une carte, devront être espacées en raison de leurs longueurs.

447. On procède à la recherche du nombre constant  $\frac{\lambda}{\epsilon}$ : soit en partant de la teinte la plus foncée, ou du plus petit espacement exécutable, correspondant à la pente la plus rapide; soit en partant du plus grand espacement qui laisse suffisamment d'apparence à la teinte de la pente la moins rapide.

Or, on admet que la dernière pente susceptible d'être ap-

préciée soit 1° ayant  $\frac{1}{64}$  pour tangente, et que la pente de 50°, ayant  $\frac{1}{1}$  pour tangente, soit la plus rapide que présentent les terres; toute autre pente résultera d'escarpements ou de rochers.

Si donc, 1.° on considère un demi-millimètre comme le moindre des espacements d'une prompte et facile exécution; en l'attribuant à la pente  $\frac{1}{1}$  dont la base graphique est un demi-millimètre, on aura  $\frac{\lambda}{e} = 1$  : et les espacements des hachures, alors égaux aux longueurs desdites hachures, ne formeront pas de teintes plus intenses que celles des sections principales.

2.° En donnant 8 millimètres au plus grand espacement de teinte, il correspondra à la pente  $\frac{1}{64}$  ayant 32 millimètres de base graphique: on tirera  $\frac{\lambda}{e} = 4$ , et les espacements des hachures, devenus le quart des longueurs de ces hachures, seront inexécutables pour les teintes des pentes plus rapides que  $\frac{1}{4}$  ou 16°.

D'où il suit qu'on doit renoncer à l'emploi des hachures de même encre et de même grosseur, pour renforcer, avec des espacements proportionnels, les teintes de toutes les zones principales des cartes.

418. Mais, comme on modifie aussi les teintes en faisant varier la grosseur de leurs hachures, § 415, on pourra employer ce moyen, concurremment avec celui des traits uniformes, pour renforcer les teintes esquissées par les sections principales: en adoptant, toutefois, le procédé le plus simple, celui des espacements proportionnels, pour teinter les projections des pentes les plus utiles à différencier; tandis qu'on recourra aux gros traits pour remplir les zones des pentes,

dont on aura souvent à distinguer le genre plutôt que la valeur. Et c'est pour cela qu'on a fait deux classes principales de pentes : 1.<sup>o</sup> les pentes *douces*, où les détails planimétriques sont essentiels et nombreux, et qui sont comprises de  $\frac{1}{64}$  ou 1<sup>e</sup> à  $\frac{1}{4}$  ou 16<sup>e</sup>; 2.<sup>o</sup> les pentes *raides*, qui contiennent peu de détails et s'étendent de  $\frac{1}{4}$  ou 16<sup>e</sup> à  $\frac{1}{1}$  ou 50<sup>e</sup> et au-delà.

En sorte que le renforcement des teintes s'effectuera : pour les pentes douces, avec les espacements proportionnels de hachures minces ; et, pour les pentes raides, avec des traits épais, qui, susceptibles aussi d'une loi d'espacements et de grosseurs, ne seront cependant assujettis qu'à imiter un modèle, tel que celui du § 421 (*fig.* 138).

419. En donnant un demi-millimètre à l'espacement des axes des hachures de la plus forte pente douce, laquelle, désignée par  $\frac{1}{4}$ , a 4 demi-millimètres de base : il viendra  $\frac{\lambda}{\epsilon} = 4$  et  $\epsilon = \frac{\lambda}{4} = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{2}$  ; c'est-à-dire que les hachures de remplissage des pentes douces devront être espacées au quart de leurs longueurs, ou à la moitié de leurs demi-longueurs.

420. Cherchons, maintenant, un mode de dessin pour les grosses hachures destinées à teinter les pentes raides.

Il faut d'abord exprimer que les espacements  $\epsilon, \epsilon' \dots$  des axes des grosses hachures, pour être exécutables, deviendront plus grands à mesure que diminueront les longueurs  $L, L', \dots$  de ces hachures : au moyen de  $k - \epsilon = r' \epsilon$ ,  $k$  et  $r'$  étant des constantes qui seront déterminées par la condition de raccorder les teintes à traits fins et les teintes à gros traits, sur la limite des pentes douces et des pentes raides.

Or,  $l$  désignant la base de la pente limite, il faudra que  $\epsilon = \epsilon'$  et  $r' = r$ , lorsque, dans  $\lambda = r \epsilon$  des pentes douces,

§ 416, et  $k - l = r'$  E des pentes raides, on remplacera  $\lambda$  et  $L$  par  $l$  : ce qui donnera  $k = 2l$  ; en sorte que  $E = \frac{2l - L}{r}$  sera la loi d'espacements des axes des gros traits, laquelle devient  $E = \frac{4 - L}{4} = \frac{2 - \frac{L}{2}}{2}$ , pour les valeurs  $l = \frac{1}{2}$  demi-millimètres et  $r = 4$  précédemment adoptées.

421. Parmi nos nombreux essais pour donner de la méthode au remplissage des pentes raides : celui, qui nous a présenté le moins de difficultés, consiste à grossir les hachures, jusqu'à ce que l'espace vide entre deux hachures paraisse le quart de leur longueur.

Alors,  $E$  ou  $\frac{4 - L}{4}$  étant la distance des axes de deux hachures consécutives  $L, L'$  ;  $e$  l'espace vide  $\frac{L}{4}$  entre les traits de grosseur  $G$  ; il vient :

$$G = E - e = \frac{4 - L}{4} - \frac{L}{4} = 1 - \frac{L}{2} ;$$

et nous avons dressé le tableau suivant :

| Pentes                   | Inclinaisons<br>à l'horizon | Grosseurs<br>des hachures | Espaces vides          |
|--------------------------|-----------------------------|---------------------------|------------------------|
| $\frac{1}{1}$            | 50°                         | $\frac{12}{16}$ millim.   | $\frac{2}{16}$ millim. |
| $\frac{1}{1\frac{1}{4}}$ | 38                          | $\frac{10}{16}$           | $\frac{3}{16}$         |
| $\frac{1}{2}$            | 30                          | $\frac{8}{16}$            | $\frac{4}{16}$         |
| $\frac{1}{2\frac{1}{4}}$ | 24                          | $\frac{6}{16}$            | $\frac{5}{16}$         |
| $\frac{1}{3}$            | 20                          | $\frac{4}{16}$            | $\frac{6}{16}$         |
| $\frac{1}{3\frac{1}{4}}$ | 18                          | $\frac{2}{16}$            | $\frac{7}{16}$         |
| $\frac{1}{4}$            | 16                          | axe                       | $\frac{8}{16}$         |

d'après lequel nous avons dessiné les grosses hachures des diverses pentes raides (*fig. 138*); et, c'est en découpant le contour de ce modèle, qu'on pourra le présenter contre chaque zone principale d'une carte, pour en guider le remplissage, § 428 page 269.

422. Pour appliquer les notions précédentes : on sait que l'intervalle de deux projections principales consécutives représente la base d'une pente ayant un demi-millimètre de hauteur; lors donc que cette base contiendra au moins 4 demi-millimètres ou 2 millimètres : la pente correspondante sera douce, et sa teinte devra être formée de traits fins espacés au quart de leurs longueurs, § 419.

Or, si (*fig. 141*) on place des points  $r, s, t, \dots$  à égale distance de deux projections principales  $abq, a'b'q'$ , pour obtenir la section intermédiaire-milieu  $rst$ , § 38 page 14; et que, après avoir tracé une première hachure  $pp'$ , on en conduise une seconde  $qq'$  de manière que  $pq = ps$ : il suffira d'intercaler une autre hachure au milieu de  $pq$ , pour que chacun des nouveaux espacements soit le quart de la longueur de la hachure sur laquelle il s'appuie.

423. Quand les lignes  $abp, a'b'p'$  seront trop éloignées pour qu'il soit facile d'estimer leur demi-distance (*fig. 141*): on divisera en quatre la zone principale, par trois sections auxiliaires  $dfe, rst, ky'n$ , et l'on tracera des hachures à des distances  $ax, xb$  respectivement égales à  $fa, cx$ ; ce qui produira, aussitôt, les espacements des hachures au quart de leurs longueurs.

424. Les hachures de plus grande pente, qui rempliront les intervalles des projections principales, ayant une courbure d'autant plus prononcée que ces projections différeront davantage du parallélisme; on ne pourra éviter de tracer des sections auxiliaires comme directrices desdites hachures. Et, si on détermine ces sections de manière à diviser la zone principale en deux ou en quatre parties égales : elles serviront, en même temps, à former l'espacement de teinte.

425. Cet espacement primitif variera souvent dans la longueur des hachures; cependant, la partie  $bx x' b'$ , entre deux hachures entières consécutives (*fig. 141*), étant regardée comme la projection d'une seule face polyédrique, devra se teinter uniformément avec des hachures  $cc'$ ,  $nn'$ ,... commençant au point où l'espacement de teinte s'altérera, ou continuées jusqu'à ce point.

On exprimera, encore, que la projection  $bx x' b'$  contient plusieurs facettes: en donnant à chaque espacement  $n'c'$  (*fig. 141*) le quart de la précédente hachure supposée entière; ce qui mettra les gradations de la teinte en rapport avec les pentes (*fig. 139*).

Enfin, au lieu d'intercaler des fractions de hachures pour compléter l'espacement de teinte: on pourrait disposer, dans les zones auxiliaires, de petites hachures espacées en raison de la zone principale; ainsi qu'on le voit en  $dk a'a$  de la figure 141, et en  $ty. na'$  de la figure 139.

426. Le commencement d'une hachure étant ordinairement plus marqué que sa fin; on en profite pour indiquer le sens de la pente: en dessinant les hachures dans ce sens même.

427. D'après la limite inférieure que nous avons donnée à la classe des pentes douces: la plus large zone à remplir sera de 64 demi-millimètres, ou 32 millimètres, propre à la pente de  $\frac{1}{64}$ . Cependant, les cotes pouvant conduire à des projections principales  $a'c'b'$ ,  $ux$  plus éloignées que 32 millimètres (*fig. 141*); on considérera chaque pente  $c'v$  de cette large zone, comme composée de deux parties: l'une  $c'v'$  un peu moins douce et l'autre  $v'v$  horizontale; ce qui sera permis, attendu que, l'inclinaison d'une pente ne s'obtenant pas sans l'incertitude de 25 centigrades, § 390 page 247, on ne pourra apprécier les pentes de  $1^s$  ou  $\frac{1}{64}$ , et celles encore plus douces, à moins du quart de leurs bases, tant en plus qu'en moins.



De sorte qu'il suffira de dessiner des hachures dans l'espace  $a'c'b'zv'u'$ , en laissant vide l'intervalle  $uv'zv$ .

428. Lorsque la largeur de la zone principale sera moindre que 4 demi-millimètres ou 2 millimètres, elle définira une pente raide qu'on devra teinter par de gros traits, dont les axes seront espacés au quart du complément de leurs longueurs à 4 millimètres, ou à la moitié du complément de leurs demi-longueurs à 2 millimètres, § 420 page 265.

Si donc, après avoir tracé une hachure de plus grande pente  $aq$  (fig. 142), on porte le compas ouvert à 4 millimètres, de façon que l'une des pointes  $b$  forme  $ab = aq$ , l'autre pointe  $c$  déterminera ( $4^{\text{millim}} aq$ ), ou  $ac$ , pour l'étendue de 4 espacements, où l'on intercalera 3 hachures qu'on grossira conformément au modèle du § 421 (fig. 138).

Ou bien, on divisera la zone principale en deux parties égales par la section intermédiaire  $os$  (fig. 142): et, ayant tracé la hachure  $tr$ , on portera la pointe  $x$  du compas ouvert à 2 millimètres, de manière que  $tx = to$ , pour avoir l'intervalle  $tn$  de deux espacements, où il suffira d'insérer une grosse hachure. Et cette bissection de la zone principale permettra de *conserver* l'ouverture 2 millimètres du compas: tant pour reconnaître la limite des pentes douces et raides, que pour déterminer l'intervalle de 2 espacements consécutifs des axes de gros traits des pentes raides.

Enfin, on pourra se borner à présenter, contre une zone de pente raide, la même zone du modèle § 421 (fig. 138), pour remplir cette pente raide en prolongeant les hachures qui la surmontent, à droite, dans le modèle.

429. Quant aux teintes des pentes qui, ayant moins de base que de hauteur, résultent d'*escarpements*, de *pics* et de *rochers*, on remplira, presque au noir, la place des escarpements définis par des sections principales très rapprochées; les pics, désignés par les projections superposées de plusieurs sections horizontales, auront leurs teintes tout-à-fait noires; et, les rochers étant esquissés par les projections de leurs faces planes, on teintera celles-ci d'après leurs pentes *présumées*, en en faisant ressortir, même avec exa-

gération, les arêtes les plus prononcées (fig. 132, 139).

430. Le Figuré du terrain se compose de formes particulières, ou *Mouvements*, que l'on peut reconnaître dans la pénétration de deux surfaces convexes ou *Croupes*.

Le *Col* est l'élément le plus élevé de la partie commune aux deux croupes. On l'appelle *Défilé* quand les pentes, qui l'avoisinent, sont très rapides.

La ligne commune aux flancs des deux croupes est le *Thalweg*, que l'on nomme particulièrement : *Ravin*, lorsque ses flancs ont une intersection prononcée ; *Vallon*, si lesdits flancs se raccordent ; et *Vallée*, quand la surface de raccord à une légère courbure.

Imaginons (fig. 136) les deux croupes *an*, *a'n*, qui se pénètrent, définies par leurs sections principales ; soit *vtno* la projection de leur ligne commune : l'élément *n* le plus élevé de cette ligne sera le col, ou point de partage des deux versants *no*, *ntv* formés par les flancs des croupes ; l'un d'eux *no* est un ravin, et l'autre *ntv* une vallée proprement dite.

Le col, placé par les sections intermédiaires tangentes *nn'*, *nn''*, est l'origine du ravin *no* ; tandis qu'il comprend un élément horizontal *nn'n''*, qu'on limitera en raccordant les sections intermédiaires *nn'*, *nn''* par la ligne *n'n''*, dont la courbure participe de la section principale voisine.

431. Les pentes des parties de zones, qui déterminent la ligne de pénétration *no* (fig. 136 et 139), étant les mêmes que celles des zones entières : les hachures de remplissage, formant les teintes de ces parties, seront dirigées et espacées en raison des zones entières. Ainsi, pour chaque point de la ligne *no*, on connaîtra l'inclinaison des pentes des surfaces adjacentes au moyen de l'espacement des hachures, et les longueurs de ces pentes se concluront des longueurs de leurs projections. Quant à la partie correspondante à *ntv* : les deux flancs, par leur raccord, formeront une surface continue dont les hachures ne se rencontreront pas, § 21 p. 8.

432. Lorsque les cotes des extrémités d'un mouvement ne seront pas principales : les zones, qui termineront ce mouvement, seront incomplètes ; et l'on indiquera cette circon-

stance, dans un tracé ne contenant que des sections horizontales (*fig. 136*), en ponctuant et en accompagnant de cotes les sections qui limitent une fraction de zone principale, § 35 page 13; tandis que le figuré, rempli par des hachures espacées en raison de la zone complète, suffira pour exprimer les fractions de cette zone (*fig. 139*).

On adoucira, même, la teinte d'une zone  $a'b'xv'u$  (*fig. 141*) qui se raccorde avec l'horizon : en terminant cette teinte par des hachures effilées, ou moins noires, conformément à la théorie du § 415 page 262.

433. Pour teinter les rochers : on en préparera les masses, comme s'il s'agissait de leur surface-enveloppe : en supposant les parties supérieures plus rapides que les pentes inférieures ; de sorte que les arêtes saillantes, ou *crêtes*, se détacheront en teintes légères sur les pentes raides qu'elles séparent ; tandis que les *thalwegs*, ou *fonds*, deviendront pâles, en adoucissant les teintes des pentes voisines (*fig. 132 et 139*). Et l'on distinguera, ensuite, les faces des rochers, par des coups de force contre leurs arêtes les plus prononcées ; comme il a été dit au § 429.

434. Les teintes avec le pinceau ou l'estompe, tout insuffisantes qu'elles soient pour faire ressortir et ménager les détails du nivellement, § 414 page 262, ont cependant l'avantage d'imprimer du relief à la masse de ces détails ; et nous ne terminerons pas cette partie de la rédaction topographique, sans former un modèle de teintes qui guide le remplissage, au pinceau ou à l'estompe, des principales pentes d'une carte.

On couvre une bande  $xy$  (*fig. 143*) d'une teinte fondue au pinceau ou à l'estompe ; et, en assignant la plus forte nuance  $xa$  aux pentes de  $50^\circ$  ou  $\frac{1}{4}$ , la plus faible teinte

$by$  sera destinée aux pentes de  $1^\circ$  ou  $\frac{1}{64}$ .

On admet que les nuances du remplissage  $xy$  décroissent en progression géométrique : de manière que, donnant un demi-millimètre de largeur à la zone  $xa$  et 64

demi-millimètres à la zone  $dy$ , les largeurs des zones des autres pentes, comprises de  $\frac{1}{1}$  à  $\frac{1}{64}$ , seront les termes moyens de la progression géométrique, ayant  $\frac{1}{2}$  millimètre et 32 millimètres pour termes extrêmes, et dont la longueur  $xy$  sera la somme de tous les termes.

$$\text{Or, on a } s = \frac{ru-a}{r-1}, u = ar^{n-1}, r = \frac{s-a}{s-u},$$

$$n = 1 + \frac{\log. u - \log. a}{\log. (s-a) - \log. (s-u)}, a = \frac{1}{2} \text{ mill.}, u = 32 \text{ mill.}$$

Si on suppose, d'abord,  $xy$  ou  $s = 100$  millim., il viendra  $r = 1,46$ ,  $n = 11,8$  ou 12; et, en calculant la réunion des deux premiers termes, celle des trois premiers....., on obtiendra les distances  $xa$ ,  $x2$ ,  $x3$ ,  $x4$ ...., qui détermineront 12 zones à teintes décroissantes.

Mais, en prenant  $r = 1,5$ , on aura  $s = 95$  millimètres; et 11,3 sera le nombre de zones, qui, réduit à 11, ramènera  $s$  ou  $xy$  à 85 millimètres, tandis que la plus large zone aura 29 millimètres, correspondant à la pente de  $1^{\circ},4$ . La largeur de chaque zone se composera, alors, de celle de la zone précédente augmentée de sa moitié; et il suffira de deux zones intermédiaires, la 4<sup>e</sup> et la 8<sup>e</sup>, pour appuyer la construction des autres zones (*fig. 143*).

$$s_1 = \frac{a(r^1-1)}{r-1} \text{ devenant alors } s_1 = (r^1-1) \text{ millimètres,}$$

la 4.<sup>e</sup> zone sera  $s_4 - s_3 = 4^{\text{mill}}, 1 - 2^{\text{mill}}, 4 = 17$  décimillimètres;  
la 8.<sup>e</sup>.....  $s_8 - s_7 = 25^{\text{mill}}, 6 - 17^{\text{mill}}, 1 = 85$  décimillimètres.

Si, d'ailleurs, on écrit, vis-à-vis de chacune de ces onze zones, l'inclinaison à l'horizon et la tangente de la pente qui a pour base la largeur de cette zone, savoir:

$$\begin{array}{l} \text{Inclin. à l'horiz. } 10^{\circ} - 28^{\circ} - 40^{\circ} - 51^{\circ} - 61^{\circ} - 70^{\circ} - 78^{\circ},6 - 85^{\circ},7 - 90^{\circ},5 - 96^{\circ},7 - 100^{\circ},1 \\ \text{Tang. des pentes } \frac{1}{2} - \frac{1}{1,5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3,7} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7,5} - \frac{1}{11,6} - \frac{1}{17} - \frac{1}{25,6} - \frac{1}{38} - \frac{1}{55} \end{array}$$

on pourra désigner immédiatement les teintes des pentes les plus remarquables d'une carte.

*Teintes conventionnelles employées sur les cartes.*

435. Quelque variées que soient les productions du sol; on en ramène la représentation à un petit nombre de teintes, faites avec les couleurs noire (encre de Chine), rouge (carmin), bleue (indigo) et jaune (gomme-gutte), qu'on mélange à-peu-près dans les proportions suivantes :

| NATURE<br>DES PRODUCTIONS                        | NOMS<br>DES TEINTES       | COMPOSITIONS<br>APPROXIMATIVES       | ORDRE<br>DU LAVIS |
|--------------------------------------------------|---------------------------|--------------------------------------|-------------------|
| Terres labourées<br>des cartes à grande échelle. | Nankin terne. .           | 2 jaun. 1 rouge. $\frac{1}{4}$ noir. | 1. <sup>re</sup>  |
| Sables. . . . .                                  | Nankin brillant.          | 2 jaune, 1 rouge. . . .              | 2. <sup>e</sup>   |
| Prairies. . . . .                                | Vert d'herbes. .          | 3 jaune, 1 bleu. . . . .             | 3. <sup>e</sup>   |
| Vignes. . . . .                                  | Lie de vin. . . .         | 4 rouge. 1 bleu, $\frac{1}{4}$ noir. | 4. <sup>e</sup>   |
| Bois. . . . .                                    | Jaune jonquille.          | Jaune. . . . .                       | 5. <sup>e</sup>   |
| Eaux. . . . .                                    | Azur. . . . .             | Bleu pâle. . . . .                   | 6. <sup>e</sup>   |
| Edifices { en bois. .                            | Noir grisâtre. .          | Noir pâle. . . . .                   | 7. <sup>e</sup>   |
|                                                  | en pierres. Rose. . . . . | Rouge demi-foncé. . .                | 8. <sup>e</sup>   |

On exprime les plus remarquables des autres productions, savoir : les *Friches* (terres et prés); les *bruyères* (herbes vertes et rouges); les *Broussailles* (taillis et prés), en entremêlant les teintes primitives.

Les jardins potagers se représentent par de faibles teintes de terres labourées et de prés, disposées *en damier* dans les carreaux qui les contournent.

Pour indiquer qu'un emplacement reste humide ou marécageux, on le parsèmera de filets au crayon qu'on remplira d'abord de bleu pâle.

On lavera les teintes conventionnelles, en commençant par les moins importantes, dans l'ordre du tableau pré-

cèdent; et l'on aura soin de mouiller chaque teinte, de manière à faire ressortir celles qui désignent les ressources et les obstacles les plus essentiels.

On relève souvent, par un coup de force, les bords de la teinte des eaux.

436. Les édifices publics se distinguent des autres par une teinte plus foncée. Et, quand on voudra reconnaître les bâtiments militaires, ceux du Génie recevront la couleur ardoise-grise, faite avec des parties égales de rouge et de bleu; et l'on couvrira les bâtiments de l'Artillerie, par la couleur ardoise-violette, composée avec une partie de rouge et deux parties de bleu.

On place, quelquefois, une teinte de sable sur les escarpements; tandis qu'on donne, aux rochers, des couleurs locales d'ardoise grise ou violette, de sable et de rose.

On remplit de vert foncé les points ronds qui représentent les arbres isolés et les haies.

437. On compose une teinte : en délayant, *avec le moins d'eau possible*, les couleurs primitives, chacune dans un godet séparé; on les mélange ensuite dans les proportions voulues, et l'on étend d'eau cette composition, de manière à approcher de la couleur désignée au tableau du § 435. On doit, aussi, renouveler fréquemment les teintes, et sur-tout l'encre de Chine qui est rarement parfaite.

Il faudra mouiller souvent les teintes, pour remédier au précipité de leurs couleurs et à l'évaporation de l'eau.

Le dessin restera horizontal pendant qu'il sera humide, pour empêcher les teintes de couler.

Enfin, on aura moins de difficulté à placer uniformément une teinte, si on n'en charge pas trop le pinceau, qu'on promènera dans le sens de la moindre largeur de cette teinte, en évitant de le laisser reposer au même endroit.

Les bons pinccaux se reconnaissent à leur forme pointue, qu'ils conservent ou reprennent après avoir été mouillés et écrasés.

On se sert ordinairement de deux pinceaux *adaptés au même manche* : l'un imbibé de la teinte ; l'autre, à peine humide, pour effacer les bavures et pour aspirer la teinte dont le premier pinceau aurait trop chargé le papier.

Les faux traits et les mauvaises teintes s'enlèvent avec une petite éponge qu'on presse légèrement sur le dessin. C'est une ressource dont il faut être sobre ; parce qu'elle détériore le papier qui, même, ne s'y prête pas toujours.

438. On pourra, souvent, placer les teintes d'une carte sans en coller la feuille ; mais, quand il sera indispensable de recourir au collage pour tendre cette feuille : on en fixera deux coins sur l'*envers* d'une tablette, et l'on jettera, avec célérité, de l'eau *sur* le dessin, de manière à mouiller toute la surface du papier qu'on laissera égoutter un moment. Après quoi, on posera, sur l'*endroit* de la tablette, la feuille dont on collera d'abord les milieux des côtés, ensuite les coins, puis les milieux des nouveaux espaces, jusqu'à ce qu'on puisse coller, d'une seule fois, les derniers intervalles.

Quand on emploie la colle-à-bouche : on la dissout par l'humidité chaude de la bouche, en évitant de trop la mouiller, parce qu'elle tiendrait difficilement au papier et qu'elle ne sécherait pas assez vite.

Il suffira, d'ailleurs, de frotter la colle sur une largeur de deux à trois millimètres, tout autour de la feuille.

439. Comme les teintes conventionnelles d'une carte altèrent l'homogénéité du fond qui a reçu le remplissage des zones principales, elles nuisent, aussi, aux effets proportionnels de ce remplissage, § 415 page 262 ; et il semblerait nécessaire de rétablir les rapports desdits effets, en renforçant ceux qui ont été affaiblis : si on n'était dispensé de cette minutieuse retouche, très difficile sinon impossible à pratiquer, par l'habitude de lire les cartes peintes, qui fait détacher, par la pensée, chaque Relief de son Plan.

*Principes de l'écriture des cartes topographiques.*

440. Quoique les indications écrites appartiennent aux mémoires descriptifs, § 310 et 453; on doit, cependant, écrire sur les cartes quelques-uns de ces renseignements: tels que les noms des villes, villages, hameaux, et le nombre de leurs feux; les noms des cours d'eau, des sommets et des vallées; ceux des forêts, des routes et des chemins; ainsi que la désignation des masses territoriales.

On dispose, autant que possible, les noms parallèlement à la base du cadre, et de manière à ne pas nuire aux détails topographiques; cependant, les noms des chemins et cours d'eau s'écrivent sur leurs développements.

Les divers genres d'écriture sont : la *Capitale*, droite ou penchée; la *Romaine*, droite ou penchée, et l'*Italique* qui est toujours penchée.

Le genre et la grandeur de l'écriture dépendent de l'échelle de la carte et de l'importance des objets désignés; on les soumet ordinairement au type que le Dépôt de la Guerre a choisi pour les feuilles de la nouvelle carte de France.

441. Sans prétendre assujettir l'écriture à un tracé géométrique, on en guide cependant le dessin par des précautions que l'habitude rend bientôt légères. C'est ainsi qu'on a inscrit la lettre de toute espèce d'écriture dans un cadre, dont nous avons régularisé la forme, en lui donnant pour largeur les trois quarts de sa hauteur.

L'épaisseur du trait plein est le huitième de la hauteur assignée à l'écriture.

L'axe d'une lettre divise la largeur de son cadre en deux parties égales; il facilite beaucoup le dessin de la lettre. L'inclinaison de l'axe d'une lettre penchée a pour base la moitié de la largeur du cadre.

Lorsqu'on peut disposer l'écriture à volonté, les lettres



d'un mot ont leurs axes espacés d'une largeur et demie de cadre, et la distance des mots est double, au moins, de celle des lettres.

442. Dans la capitale, toutes les lettres ont le même cadre, excepté I, J, F, P, Y et M, cette dernière lettre dérive du V.

O, C, D, G, Q, U se construisent sur l'O.

S, B, X, R, Z, K, E sont une modification du S, que l'on forme symétriquement à son axe, de façon que la tête soit, d'une épaisseur de trait, moins large que le bas.

L'écriture en capitales ne comporte pas de majuscules.

443. O, S, X et Z romains se construisent comme les capitales. La plupart des lettres romaines et italiques dérivent de l'O; plusieurs se prolongent, en dessus ou en dessous du corps de lettre, d'une quantité égale à la hauteur de ce corps.

La tête du **G** s'inscrit dans un carré ayant pour côté la largeur du cadre; tandis que sa partie inférieure est limitée au carré fait sur la hauteur dudit cadre.

Le **t** excède, d'une épaisseur de trait, le corps de lettre.

Pour écrire un mot en caractères romains ou italiques: on marque la place de chaque lettre par un O, que l'on modifie ensuite convenablement.

Dans l'écriture romaine ou italique, les mots, qui commencent les phrases, prennent la majuscule capitale de double hauteur.

444. Les chiffres sont droits ou penchés; les chiffres romains se composent des capitales I, V, X, D, C et M. Les dix chiffres arabes 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9 n'ont besoin que d'être indiqués.

#### *Copie des cartes.*

445. La rédaction topographique comprend, aussi, la manière de copier une carte dans une proportion voulue,

et de composer, à une échelle donnée, l'assemblage de cartes contiguës ayant des échelles différentes.

Le pantographe, dont l'emploi est détaillé aux § 121, 122, 126, pag. 69, 70, 72, facilite beaucoup cette opération; mais, faute de pantographe, on appliquera à la copie des cartes la méthode du § 113 page 64.

Ainsi, pour copier une carte AYRNQ (fig 33) : on en couvrira chaque partie RAN par un transparent, en verre ou en papier, sur lequel on aura marqué un canevas de coordonnées formant des parallélogrammes d'autant plus petits que les détails de la carte seront plus abondants, et de façon qu'on puisse estimer la moitié, le tiers ou le quart des côtés de ces parallélogrammes. On tracera, sur la feuille du dessin, un semblable carrelage, dont les côtés auront avec les précédents le rapport des échelles de la copie et du modèle; puis, on donnera les mêmes numéros aux grandes lignes de division homologues des deux canevas.

On décomposera, alors, le modèle en plusieurs masses principales terminées à des chemins et cours d'eau, pour en décrire légèrement les contours par points marqués sur les côtés du carrelage de la copie. Ces polygones étant susceptibles d'en renfermer d'autres circonscrivant les derniers détails : on arrêtera les seconds polygones comme les premiers; et, enfin, on copiera les parties les plus minutieuses, carreaux par carreaux, qu'on subdivisera au besoin, sur le modèle et sur la copie, par des parallèles ou par des diagonales.

Les chemins se dessinant, presque toujours, par deux lignes parallèles : il suffira d'en copier un côté et l'amorce de l'autre, pour tracer aussitôt celui-ci; en se rappelant que, dans une carte à petite échelle, les largeurs des chemins sont toujours exagérées.

On copie les emplacements bâtis : en considérant les rues comme des chemins, qui perdent ensuite le parallélisme de leurs côtés, en y appuyant les murs et les édifices dont les

principales saillies doivent rester apparentes, même en les exagérant.

446. L'esquisse du plan étant terminée au crayon, on la mettra à l'encre dans l'ordre prescrit au § 409, p. 259.

On écrira, ensuite, les cotes que l'on veut conserver; et l'on esquissera, au crayon, les sections principales du nivellement : en modifiant celles de l'original, conformément au principe de l'équidistance graphique constante, qui donne, aux projections des zones principales de la copie, la même largeur qu'à celles de l'original, § 410 page 259. Puis, on tracera ces sections à l'encre noire, § 412; ou bien, l'on renforcera, avec des hachures, les teintes qu'elles indiquent, § 422, 428.

Après quoi, on lavera les teintes conventionnelles; pour terminer le dessin par les arbres isolés et les haies, § 435, 436.

---

#### CHAPITRE V<sup>e</sup>. : CROQUIS PRÉPARATOIRES D'UN LEVÉ.

447. Les derniers détails topographiques se construisent d'autant plus facilement qu'on a mis plus de soin au registre et au figuré préparatoire de la station, par laquelle on doit rattacher ces détails aux points principaux du levé, § 378 page 238.

Le *Croquis*, destiné à rappeler la figure du terrain avoisinant une station, est l'expression *graphique* des observations faites à vue, et successivement, dans les directions partant de ladite station.

La figure 33 présente les croquis planimétriques dessinés autour des stations N, P, S, T, Z,... L'habitude donne, à ces croquis, des dimensions commodes à l'inscription des nombres relatifs aux distances horizontales et aux graduations, *entre parenthèses*, des coups d'alidade, qu'on s'est dispensé d'enregistrer au calepin d'observations, § 403 page 255. Le raccord des croquis contigus en fait mieux saisir la liaison, et

empêche de répéter les mesures qui seraient communes auxdits croquis. On favorise cette utile disposition, dans un levé par zones allongées, § 325: en dessinant les croquis sur les parties d'une longue feuille, repliée de manière à présenter la même face au crayon.

Les matériaux topographiques à grandes échelles, qu'on pourra obtenir sur les localités, seront de bons croquis dont il ne faudra pas négliger l'emploi, § 402, 445.

448. Le relief ou *mouvement de terrain* d'une station est l'ensemble des pentes qui avoisinent cette station; et le croquis dudit relief résulte des descriptions partielles de ses pentes.

449. On ne peut estimer le sens et la rapidité d'une pente, qu'autant que, *placé sur cette pente même*, on en regarde une *petite* longueur: car, stationné en  $s$  (*fig.* 144), l'observateur  $c$  s rapporte les points  $v, t, b, a, \dots$  sur un tableau fictif  $xx$  qui le sépare de ces points, tellement que toutes les pentes lui paraîtront *ascendantes*.

En effet: 1.<sup>o</sup> les points  $v$  et  $t$  de la pente prolongée  $sa$  se relèveront d'autant plus en  $v$  et  $t$  qu'ils seront plus éloignés de l'œil  $c$ ; 2.<sup>o</sup> l'horizon  $xb$ , se relèvera aussi en  $xb$ , comme la partie  $xa'$  d'une contre-pente  $xa$ ; 3.<sup>o</sup> la contre-pente  $xa$  sera perspectivement exagérée, en raison de la distance  $ca$ .

Cependant, le relèvement perspectif  $xa$  d'une pente  $xa$  n'atteindra jamais la parallèle  $cx$  conduite, par l'œil  $c$ , à la direction de cette pente.

450. On exprime *graphiquement* le jugement porté sur le sens et la rapidité d'une pente: en accompagnant sa direction  $ca$  ou  $cb$  (*fig.* 146) d'une flèche dirigée dans le sens descendant, et en traçant, contre cette direction, des hachures qui forment, par leurs espacements ou par leurs grosseurs, une teinte propre à l'inclinaison attribuée à la pente, conformément aux § 418, 419 et 420.

Cependant, lorsqu'on pourra mesurer immédiatement les inclinaisons zénithales des pentes, station  $\kappa$  (*fig.* 132), leurs

graduations, écrites sur les directions de ces pentes, dispenseront de marquer les flèches.

451. Le relief d'une station sera d'autant mieux étudié qu'on aura observé davantage de ses pentes; mais il suffira de considérer quatre pentes de la forme, concave ou convexe, la plus prononcée, pour définir le genre de ce relief.

En effet, l'observation des quatre pentes principales, ascendantes ou descendantes, d'une station fournira l'une des combinaisons suivantes:

| PENTES                             |               | MOUVEMENTS DE TERRAIN |                          |
|------------------------------------|---------------|-----------------------|--------------------------|
| Ascendantes.                       | Descendantes. |                       |                          |
| 1. <sup>o</sup> . . 0 . . . . .    | 4 . . . . .   | Sommet s              | (fig. 145) et (fig. 132) |
| 2. <sup>o</sup> . . 1 . . . . .    | 3 . . . . .   | Croupe c              | (fig. 146)               |
| 3. <sup>o</sup> . . 2 successives  | 2 . . . . .   | Croupe κ              | (fig. 147)               |
| 4. <sup>o</sup> . . 2 alternatives | 2 . . . . .   | Col n                 | (fig. 149)               |
| 5. <sup>o</sup> . . 3 . . . . .    | 1 . . . . .   | Thalweg τ             | (fig. 150)               |
| 6. <sup>o</sup> . . 4 . . . . .    | 0 . . . . .   | Gouffre g             | (fig. 148)               |

1.<sup>o</sup> Les quatre pentes descendantes sont indiquées à partir de la station s (fig. 145), par les directions SA, SB, SE, SF, portant des flèches dirigées dans le sens descendant, et accompagnées de hachures fines ou grosses, dont les teintes rappellent les inclinaisons estimées. La liaison de ces pentes dessine un *Sommet*, dont on raccordera plus nettement les flancs : en remplaçant les lignes de pente par d'autres lignes simulant des sections principales espacées de 4 <sup>millim.</sup> e ou de (4 — 4κ); e étant l'espacement des hachures fines de pentes douces, § 419, et κ celui des grosses hachures de pentes raides, § 420 page 265.

2.<sup>o</sup> Les observations faites en c (fig. 146), sur la pente ascendante CA et sur les trois pentes descendantes CB, CE, CF, étant convenablement désignées : les hachures, qui expriment les pentes AC, CB de pareil sens, pourront se raccorder selon A<sup>ts</sup> dans l'espace ACB; de même, les hachures

des pentes  $AC$ ,  $CF$  se raccorderont selon  $AF$  dans l'espace  $ACF$ . En sorte que la liaison des quatre pentes élémentaires produira la forme convexe d'une *Croupe*, dont on remplacera avantageusement les hachures primitives par des lignes simulant des sections principales.

3.° La combinaison des deux pentes ascendantes successives  $KA$ ,  $KB$  avec les deux pentes descendantes  $KE$ ,  $KF$ , partant de  $K$  (*fig. 147*), fournit des raccords analogues aux précédents et figure aussi une croupe.

4.° De ce que les quatre pentes élémentaires, observées en  $N$  (*fig. 149*), sont alternativement ascendantes et descendantes : il résulte que les pentes de même sens  $AN$ ,  $NB$  se raccordent selon  $AB$  dans l'espace  $ANB$ , comme les pentes  $AN$ ,  $NF$  se continuent suivant  $AF$  dans l'espace  $ANF$ , pour former ensemble la croupe tombant de  $A$  en  $N$ ; on se rendra un pareil compte de la croupe composée des pentes  $EN$ ,  $NB$ ,  $NF$ : de sorte que la station  $N$  marquera le *Col*, ou sommité de la pénétration des deux croupes  $AN$ ,  $EN$ .

5.° Les trois pentes ascendantes  $TB$ ,  $TE$ ,  $TF$ , partant de  $T$  (*fig. 142*), se prolongent sur la pente descendante  $TA$  pour produire la forme concave du *Thalweg*.

6.° Enfin, le *Gouffre* résultera des pentes ascendantes  $GA$ ,  $GB$ ,  $GE$ ,  $GF$ , observées en  $G$  (*fig. 148*).

452. L'exercice fréquent de cette manière d'étudier le relief du terrain permettra, bientôt, de dessiner et de raccorder les croquis des stations  $S$ ,  $C$ ,  $K$ ,  $T$ ,  $N$ ,  $G$  (*fig. 132*), aussi promptement qu'on en aura vu les détails. Et l'assemblage de ces croquis composera une reconnaissance, dont on tirera un grand parti dans la rédaction de la carte; surtout, quand on ne pourra construire géométriquement les détails de cette carte à mesure qu'on les observera.

453. On prendra, à chaque station, les noms des localités, les aboutissants des chemins, ainsi que toute espèce de renseignements statistiques qu'on ne craindra pas de multiplier, pour en faire, plus tard, un choix approprié au *Mémoire descriptif* et au but du *Levé*, § 310.

## LIVRE IV.<sup>e</sup> — TOPOGRAPHIE IRRÉGULIÈRE.

### CHAPITRE I.<sup>er</sup> : CANEVAS D'UN LEVÉ IRRÉGULIER.

454. La reconnaissance d'un terrain, pour être prompte, se fait par un levé irrégulier dont les limites seules ont quelque précision : en laissant aux détails l'imperfection tolérée par le but de cette reconnaissance, § 9 page 3.

On prendra l'échelle d'un levé irrégulier d'autant plus petite, qu'on voudra mieux dissimuler les erreurs d'exécution, ou qu'on se proposera de réunir une masse plus considérable de formes principales sur une feuille portative.

Le  $\frac{1}{20000}$ , qui est la plus petite échelle des cartes régulières, sert de plus grande échelle aux levés irréguliers; et, comme l'échelle graphique de ces levés n'a pas besoin des subdivisions du millimètre, § 101, sa construction n'occupera souvent qu'une seule ligne *ax* (fig. 30).

Quelque peu de moyens que l'on ait pour exécuter la topographie irrégulière; on évitera que les erreurs des détails se compliquent de manière à altérer trop fortement les grandes dimensions de la carte : en encadrant ces détails dans des contours plus précis, au moyen d'un canevas qu'on distribuera en plusieurs feuilles pouvant être simultanément levées.

455. Nous avons vu dans la topographie régulière, où l'on emploie des instruments suffisamment exacts, qu'il

fallait mesurer les angles d'un canevas plutôt que ses côtés, § 316 page 183; mais, quand les instruments géodésiques sont imparfaits, on doit chercher à résoudre les triangles en évaluant leurs côtés plutôt que leurs angles.

En effet, on conclut de l'expression  $\sin \varphi < \frac{e}{c}$ , obtenue § 83 page 43, que les erreurs  $e$ , dans l'évaluation des côtés, occasionnent des variations  $c$  fois plus petites aux angles opposés; tandis que  $e > c \sin \varphi$  montre que les erreurs  $e$ , sur les côtés opposés, suivent une marche plus rapide relativement à  $\varphi$ .

456. On estimera les grands côtés d'un canevas irrégulier, au moyen de la vitesse du son, quand leurs extrémités accessibles permettront de faire les expériences convenables, § 152 page 87.

On conclura aussi les grandes distances, par les développements itinéraires qui unissent leurs extrémités : en prenant les  $\frac{4}{5}$  de ces développements quand ils traversent un terrain fortement accidenté, et les  $\frac{6}{7}$  du chemin en terrain plat ou peu accidenté, § 151 page 86.

Faute de mieux, on se procurera des bases par l'amplification d'une carte géographique.

457. On calculera les angles de chaque triangle du canevas, par la formule  $2 \cos c = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - \frac{c}{a} \frac{c}{b}$  du § 56, page 27.

Et, si tous les côtés de ces triangles n'ont pu être évalués, on emploiera une boussole à la main, § 196 page 116, ou un goniomètre à réflexion, § 211 p. 122 et § 215 p. 124, pour mesurer les angles nécessaires, qu'on ne réduira ni au centre ni à l'horizon. Puis, on rapportera les coordonnées horizontales des sommets à deux axes rectangulaires, § 324 page 187, pour faciliter la répartition desdits sommets sur les feuilles de détail contenant les limites des zones à reconnaître.



458. Au défaut d'éclimètres pour mesurer les inclinaisons zénithales servant au nivellement du canevas, § 336 p. 195; on a recours aux observations barométriques dont les éléments composent la formule des différences de niveau, démontrée à la fin de l'Hydrostatique de Poisson, savoir :

$$z' - z = 18393^m \left( 1 + \frac{8837 \cos 2L}{1000000} \right) \left( 1 + \frac{t + t'}{500} \right) \left[ \log. h - \log. h' - \log. \left( 1 + \frac{\tau - \tau'}{1550} \right) \right]$$

dans laquelle,

$z, z'$  représentent les verticales des stations ;

$h, h'$ , les décimillimètres des hauteurs barométriques ;

$t, t'$ , les nombres de degrés des températures atmosphériques ;

$\tau, \tau'$ , les nombres de degrés des températures du mercure ;

$L$ , la latitude moyenne entre les stations ;

et, en France, cette formule se réduit presque toujours à :

$$z' - z = 18393^m (\log. h - \log. h') \left( 1 + \frac{t + t'}{500} \right)$$

dont les termes sont consignés dans les tables de l'Annuaire du Bureau des Longitudes, de manière à calculer promptement chaque différence de niveau avec une approximation d'environ un décimètre.

## CHAPITRE II.<sup>e</sup> : DÉTAILS D'UN LEVÉ IRRÉGULIER.

459. Une feuille étant préparée, par deux sommets au moins, § 324 page 188; on commencera par y rattacher, avec des mesures d'angles, § 376 page 237, deux stations destinées : 1.<sup>o</sup> à régler la boussole graphique, qui, en to-

pographie irrégulière, est préférée à tout autre gonio-mètre, à cause de son repère spontané et du tracé immédiat de ses coups d'alidade; 2.<sup>o</sup> à construire l'échelle graphique des portées, devant servir à l'appréciation des distances de détail, § 377 page 237, si on ne l'a préalablement conclue de l'échelle numérique, § 135 page 76.

Et, faute de points qui assemblent une feuille au canevas général : on se placera sur un alignement dont la projection, tracée à volonté, servira d'appui au coup d'alidade déclinateur de la boussole graphique. Puis, on mesurera, sur cet alignement, une base qu'on rapportera : soit au moyen d'une échelle donnée; soit arbitrairement, pour en déduire l'échelle en divisant cette base graphique par le nombre des unités de mesure comprises dans la distance parcourue; et il sera commode de rendre ce nombre de portées multiple-pair de dix, § 136 page 77.

460. Des tours-d'horizon, faits à ces premières stations, projetteront des points de repère, auxquels on rattachera les derniers détails planimétriques par l'intermédiaire de stations utilement déterminables; comme on l'a pratiqué dans les levés réguliers, § 378 page 238 : et l'on aura soin d'arrêter, chemin faisant, de nouveaux points principaux destinés à coordonner les détails qu'ils enveloppent.

461. L'emploi de matériaux topographiques, tels imparfaits soient-ils, facilitera beaucoup les levés irréguliers, qui consisteront, même, en une rectification à vue, si on a encadré, dans un canevas préparatoire, lesdits matériaux convenablement transformés par le procédé du § 445, page 277.

C'est en topographie irrégulière qu'on appréciera l'avantage d'un coup-d'œil exercé à estimer les distances par la pratique des levés réguliers; aussi, doit-on, dans l'exécution de ces levés, comparer souvent les distances naturelles à leurs représentations graphiques.

Les croquis préliminaires des stations, qui ont été recommandés pour les levés géométriques, § 447 page 279, de-

viennent indispensables à la prompte exécution de la topographie irrégulière.

462. A une échelle plus petite que  $\frac{1}{20000}$ , on lève les lieux habités : en repérant leurs issues principales sur des points primitifs, et en contournant à vue les rues sur lesquelles on appuie les massifs de maisons. Souvent, même, on se borne à indiquer la rue la plus importante pour y grouper des massifs conventionnels.

463. On composera la tablette d'une boussole graphique, avec une plaque, en planche ou en carton, appuyée sur un trépied fait de trois baguettes réunies par un nœud (fig. 83), ou supportée par un simple bâton; tandis que l'alidade de cette boussole consistera en une règle épaisse (fig. 68) suppléée, au besoin, par un morceau de papier deux fois plié dans sa longueur, § 458; et le déclinatoire, réduit à de très petites dimensions, sera fixé à la table, § 237 page 134.

On créera, aussi, une équerre d'arpenteur avec une petite plaque et trois épingles formant deux alignements rectangulaires, § 239 page 135 (fig. 90); et l'on construira les principaux angles de détail, en faisant entrer chacun d'eux dans un triangle dont on évaluera les côtés.

464. L'éclimètre-à-perpendiculaire, formé d'un rapporteur et d'un fil-à-plomb, § 299 page 173, servira à mesurer les inclinaisons zénithales du nivellement de détail. Et, lorsqu'on sera privé de ce simple instrument, on coordonnera les cotes verticales des principales stations : en les comparant deux-à-deux à un même point de mire plus élevé qu'elles, par le procédé du § 394 page 249, où l'on emploie un seul bâton, successivement posé en  $t$  et  $t'$  (fig. 135), de manière que l'observateur, mesurant les longueurs  $ab$  ou  $a'b'$ ,  $ss'$ ,  $ts$  et  $t's'$ ,

puisse conclure aussitôt  $nv = \frac{ss' \times a'b'}{t's' - ts}$ ; et que, stationné en un autre lieu  $s''$  d'où il apercevra encore le point de mire  $v$ , il obtienne la différence de niveau  $N''v$ , qui, retranchée de

nv, donnera la différence de niveau entre les lieux s et s".

On étudie les mouvements de terrain, comme nous l'avons indiqué au § 451 page 280. L'habitude acquise, dans le jugement des pentes avec des instruments, permettra de les dessiner par des hachures fines ou grosses, *simulant* des lignes de plus grande pente, et espacées en raison des bases graphiques attribuées aux dites pentes.

465. Les moyens de rédaction d'un levé irrégulier diffèrent peu de ceux de la topographie régulière : on accélère le dessin de la planimétrie irrégulière, en indiquant les chemins avec un seul trait plus ou moins épais, et coloré selon la nature de ces chemins. On emploie le rouge pour les chemins pavés, et le noir pour les chemins praticables aux voitures; tandis que le jaune distingue les chemins non praticables. Les sentiers se marquent par un trait ponctué. Les grandes routes conservent leurs deux traits.

Les mouvements de terrain, dessinés au crayon, acquerront un effet plus apparent : en les teintant à l'encre de Chine, § 434 page 271; quelquefois, même, on se contente de les mouiller pour en fixer le crayon.

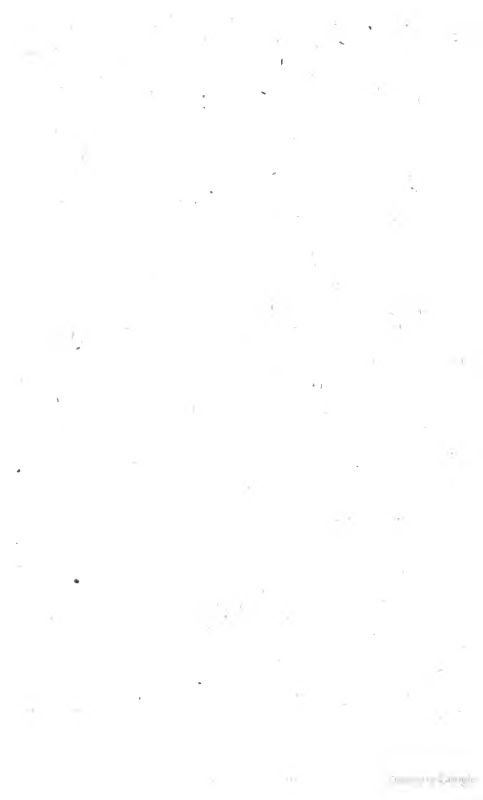
Lorsqu'on n'aura ni le temps ni la facilité de placer les teintes conventionnelles du § 435 page 273 : on rendra très distinctes les initiales des productions principales.

L'écriture des cartes irrégulières se fait en caractères italiques plus ou moins grands, selon l'importance des désignations.

SBN  
607520







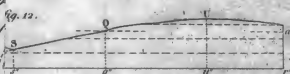
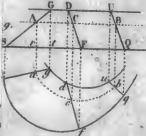
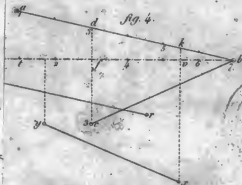


fig. 13.

1733



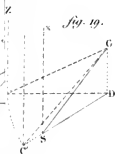


fig. 19.

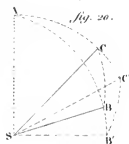


fig. 20.

b

fig. 23.

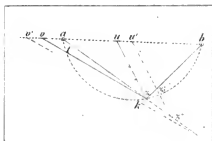


fig. 27.

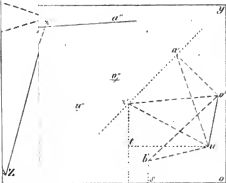


fig.

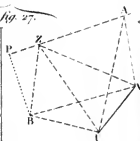
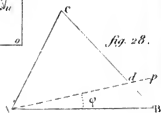


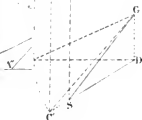
fig. 28.



(1944)

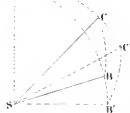
z

fig. 19.



y

fig. 20.



b

fig. 23.

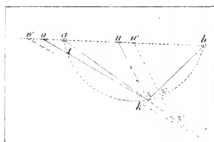


fig. 27.

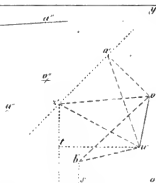
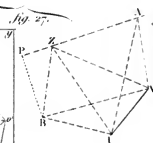
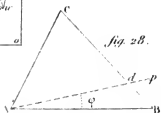
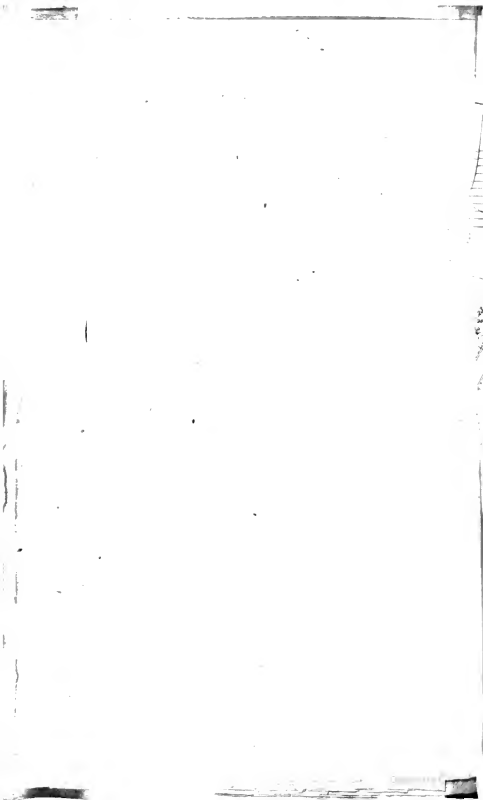
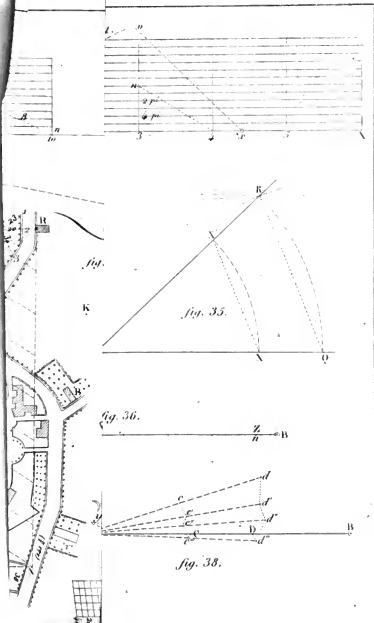


fig.

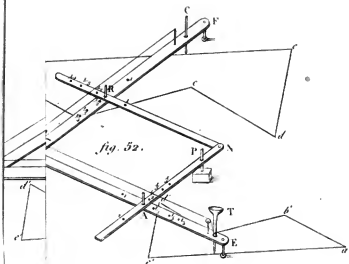
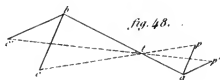
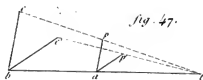
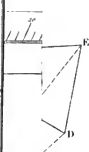
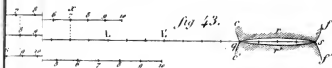
fig. 28.





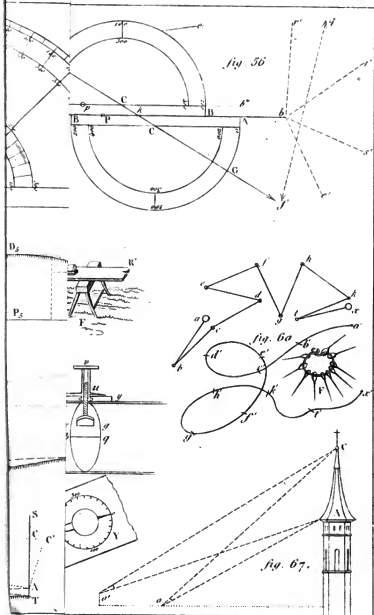




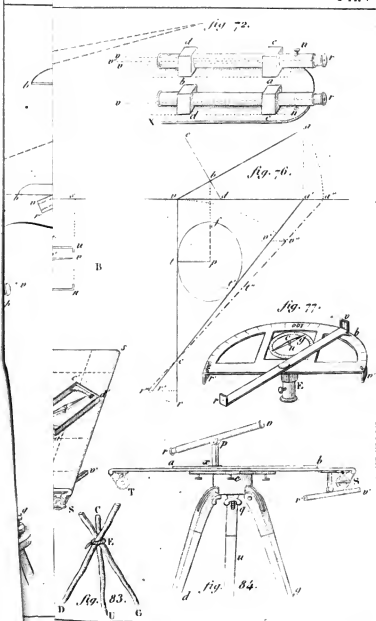




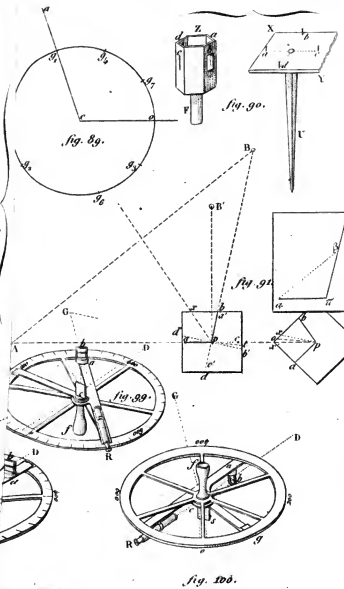














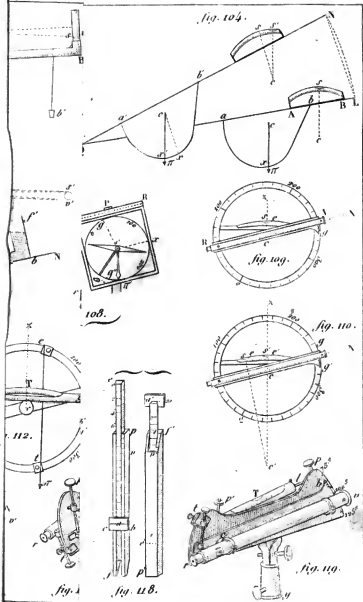






fig. 123.

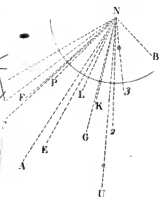


fig. 124.

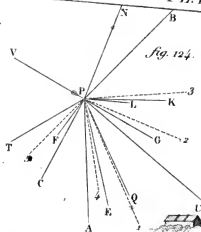


fig. 127.



fig. 131.

